lundi 1 juin 2026 (Théorèmes d'interversion)

Exercice 1 *(Ccinp): Soit* $F : \lambda \mapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} dx$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de* F.
2. *Soit* $a > 0$. *Montrer que* F *est de classe* C^1 *sur* $[a, +\infty[$. *Calculer* $F(\lambda)$.
3. *En déduire, pour* $a, b > 0$, *la valeur de* $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

Exercice 2 *(Mines telecom): Donner un développement en série entière de* $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ *sur un intervalle à préciser.*

Exercice 3 *(centrale On pose, pour* x *réel,* $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^x}{1+t^2} dt$.

1. *Etudier l'ensemble de définition* $\mathcal{D}$ *de* F *et montrer que* F *est continue sur* $\mathcal{D}$.
2. *Etudier la parité de* F
3. *Etudier la dérivabilité de* F.
4. *Déterminer les limites au bornes de l'ensemble de définition de* F.
5. *Montrer que* $F(x) = \int_0^1 \dfrac{t^x + t^{-x}}{1+t^2} dt$ *et donner un équivalent simple de* F *aux bornes de son ensemble de définition.*

Exercice 4 *Ccinp: Montrer que la fonction de la variable réelle définie par* $f(x) = \dfrac{ch(x) - 1}{x^2}$ *admet un prolongement de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 5 *On pose, pour* x *réel,* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2}$.

1. *Montrer que* f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$.
3. *Trouver un équivalent de* $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ *quand* x *tend vers* 0^+. *La fonction* f *est-elle dérivable en* 0*?*
4. *Trouver un équivalent de* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *quand* x *tend vers* 0^+.
5. *Tracer la courbe représentative de* f.

Exercice 6 *(Mines ponts) Soit* E *un ensemble non vide.*
Une partition de E *est un ensemble* $\mathcal{P}$ *non vide de parties de* E *telle que si* j *est le cardinal de* $\mathcal{P}$ *et que* $\mathcal{P} = \{A_1, A_{2,}, \ldots, A_j\}$ *alors* $\mathcal{P}$ *vérifie les trois conditions:*
- pour tout $i \in [[1, j]]$, A_i *est non vide*
- pour tout $(i, i') \in [[1, j]]^2$ *tel que* $i \neq i'$, *on a* $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$.
- $E = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_j$
On pose $T_0 = 1$. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* T_n *le nombre de partitions d'un ensemble de* $[[1, n]]$.

1. *Déterminer* T_1, T_2 *et* T_3.

2. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$.

3. *Montrer qu'il existe* $R > 0$ *tel que* $\forall x \in \left]-R, R\right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}$.

4. *En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.