mardi 2 juin 2026 **(evn et équa diffs)**

Exercice 1 *(Ccinp) Résoudre l'équation différentielle* $(\mathcal{E}) : xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$ *sur l'intervalle* $]-\infty, 1[$.

Exercice 2 *(Mines ponts) On définit, pour* $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right|$ *et* $N_2(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.

1. *Montrer que* N_1 *et* N_2 *sont des norme de* $\mathbb{R}[X]$.
2. *Les normes* N_1 *et* N_2 *sont elles équivalentes?*

Exercice 3 *(mines télécom): On cherche les applications* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x : (\mathcal{E})$$

1. *Justifier que si* f *vérifie* $(\mathcal{E})$ *alors* f *est de classe* C^∞ *et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre* 2.
2. *Déterminer les fonctions vérifiant* $(\mathcal{E})$.

Exercice 4 *(CCINP): Soit* E *l'ensemble des fonctions* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *vérifiant* $f(0) = 0$.
Pour $f \in E$, *on pose* $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ *et* $N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$.

1. *Montrer que* N_1 *et* N_2 *sont des normes de* E.
2. *Soit* $f \in E$. *Montrer que pour tout* $x \in [0,1]$ $e^x f(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t))\, dt$.
3. *En déduire que les normes* N_1 *et* N_2 *sont équivalentes.*

Exercice 5 *(mines télécom) Soit* $\lambda > 0$ *et* (E) *l'équation différentielle* $xy' + \lambda y = \dfrac{1}{1+x}$.

1. *Exprimer à l'aide d'une intégrale les solutions de* (E) *sur* $]0, +\infty[$.
2. *Montrer qu'il existe une unique solution bornée au voisinage de* 0^+.

Exercice 6 *(Mines ponts): Montrer qu'il existe* $A \in O_n(\mathbb{R})$ *telle que pour tout* $M \in O_n(\mathbb{R})$, *on a*

$$tr(A - I_n) \times tr\left(A^T - I_n\right) \leq tr(M - I_n) \times tr\left(M^T + I_n\right)$$

Exercice 7 *(Mines ponts): Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $xy' - ny = 0 : (\mathcal{E})$.

Exercice 8 *(mines ponts) Soit* E *un espace normé et* C *une partie convexe de* E.

1. *Montrer que l'adhérence de* C *est une partie convexe de* E *qui contient* C.
2. *On appelle intérieur de* C *l'ensemble des points* $a \in E$ *qui sont intérieurs à* C *c'est-à-dire vérifiant :*
   $\exists r > 0, \forall x \in E, \|x - a\| < r \Longrightarrow x \in C$.
   Montrer que l'intérieur de C *est une partie convexe de* E *contenue dans* C.

Exercice 9 *(Mines ponts) On considère l'équation différentielle* $(\mathcal{E}) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ *où* a *et* b *désignent des fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

1. *Soit* f *et* g *deux solutions de* $(\mathcal{E})$. *Exprimer la fonction* $W = fg' - f'g$ *à l'aide de la fonction* a *et de* $W(0)$.

2. *On suppose a impaire et b paire.*
   Montrez que la fonction f solution de $(\mathcal{E})$ vérifiant les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ est paire.
   Montrez de même que la fonction g solution de $(\mathcal{E})$ vérifiant les conditions initiales $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$ est impaire.
   En déduire qu'il existe une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{E})$ constituée d'une fonction paire et impaire.

3. *On suppose qu'il existe une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{E})$ constituée d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

   a *Montrez que a est impaire*

   b *En déduire que b paire.*

Exercice 10 *(Centrale) Pour $n \geq 1$, on note E_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients réels.*
Montrer que $\inf\limits_{P \in E_n} \left(\int_0^1 |P(t)| \, dt \right) > 0$.