mercredi 3 juin 2026 (équa diffs)

Exercice 1 *(ccinp) Soit les équations* $(E_0) : x^2y'' - 2y = 0$ *et* $(E) : x^2y'' - 2y = x^3$.

1. *Trouver une solution polynomiale* $\mathfrak{u}$ *de* (E_0).
2. *Trouver une fonction* v *solution de* (E_0), *indépendante de* $\mathfrak{u}$, *écrite sous la forme* $v(x) = \mathfrak{u}(x)z(x)$ *avec* z *de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$.
3. *Déduire de la question précédente les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$.
4. *Trouver toutes les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 2 *(ccinp)*

1. *Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation* $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0 : (E)$.
2. *Existe-t-il des solutions sur* $]-\infty, 0[$ *non développables en série entière?*

Exercice 3 *(ccinp) On se propose de déterminer des fonctions* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *dérivables vérifiant:*

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}^*, f'\left(-\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

1. *On suppose que* f *vérifie* (E). *Déterminer une équation différentielle du second ordre* (E') *vérifiée par* f.
2. *Quelles sont les fonctions de la forme* $x \mapsto x^a$ *solutions de* (E') *sur* $]0, +\infty[$.
   Résoudre (E') *sur* $]0, +\infty[$ *et sur* $]-\infty, 0[$
3. *Conclure.*

Exercice 4 *(ccinp 2018) On considère l'équation différentielle* $t(t^2-1)x'(t) + 2x(t) = t^2 : (\mathcal{E})$

1. *Trouver* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tels que* $\dfrac{1}{t(t^2-1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-1} + \dfrac{c}{t+1}$.
2. *Résoudre* $(\mathcal{E})$ *sur* $]1, +\infty[$.
3. *Soit la fonction* f *définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $t \to \begin{cases} \dfrac{\ln(t)}{t-1} \text{ si } t \neq 1 \\ 1 \text{ si } t = 1 \end{cases}$
   et g *la fonction définie sur* $]-1, +\infty[$ *par* $t \to \begin{cases} \dfrac{\ln(1+h)}{h} \text{ si } h \neq 0 \\ 1 \text{ si } h = 0 \end{cases}$.
   Montrer que les fonctions f *et* g *sont de classe* C^∞
4. *Résoudre* $(\mathcal{E})$ *sur* $]0, +\infty[$.
5. *Résoudre* $(\mathcal{E})$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 5 *(ccp) On considère l'équation différentielle* $x^2y'' + 4xy' + 2y = 1 : (\mathcal{E})$.

1. *Trouver une solution particulière de* $(\mathcal{E})$ *sur* $]0, +\infty[$.
2. *Avec le changement de variable* $x = e^t$, *résoudre l'équation* $(\mathcal{E})$*sur* $]0, +\infty[$.

Exercice 6 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $f : x \mapsto \cos(\alpha \times \arcsin(x))$.

1. *Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par la fontion f sur un intervalle à préciser.*

2. *En déduire un développement en série entière de f.*

3. *Pour quelles valeurs de α la fonction f est-elle polynômiale?*

Exercice 7 *(ccinp) Soit la suite réelle (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.*

2. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.*

3. *En déduire une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par la somme S de cette série entière et calculer $S(x)$.*

Exercice 8 *(Mines ponts) Soit $a \in \left]0;1\right[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
Dans les question 1,2, et 3, on suppose que f dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.

1. *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

2. *Exprimer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de f.*

3. *En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.*

4. *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.*