

mardi 19 mai 2026 (espaces euclidiens)

Exercice 1 (ccinp): Soit u et v deux vecteurs distincts et non nuls d'un espace euclidien E . On note H l'hyperplan normal à $u - v$ et s_H la réflexion par rapport à H .

1. Dans cette question uniquement, $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. $u = (1, -1, 1, 0)$ et $v = (0, -1, 1, 1)$.
Ecrire la matrice dans la base canonique de la réflexion s_H . En déduire que $s_H(u) = v$.
2. Montrez que s'il existe une réflexion s telle que $s(u) = v$, alors $\|u\| = \|v\|$.
3. On suppose que $\|u\| = \|v\|$.
 - a Montrer que $u - v$ et $u + v$ sont orthogonaux. En déduire que $s_H(u) = v$.
 - b Soit s une réflexion. Montrer que si $s(u) = v$ alors $s = s_H$.

Solution de l'exercice:

1: Soit p la projection orthogonale sur $\text{vect}(u - v)$. On a $p(x) = \frac{(x|u - v)}{\|u - v\|^2} (u - v)$.

On en déduit que $s_H(x) = q(x) - p(x) = x - 2p(x)$ (avec $q = id - p$) donc $s_H(x) = x - 2 \frac{(x|u - v)}{\|u - v\|^2} (u - v)$.

Or $u - v = (1, 0, 0, -1) = e_1 - e_4$ donc

$$\begin{cases} s_H(e_1) = e_1 - (e_1 - e_4) = e_4 \\ s_H(e_2) = e_2 \\ s_H(e_3) = e_3 \\ s_H(e_4) = e_4 + (e_1 - e_4) = e_1 \end{cases} \quad \text{et } \text{mat}_{b_0}(s_H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Remarque: on a bien $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2: Une réflexion est une symétrie orthogonale donc une isométrie vectorielle.

Or $s(u) = v$ donc $\|u\| = \|s(u)\| = \|v\|$.

3: a: • On a $(u - v|u + v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$ (On donc $u + v \in H$).

• Montrons que $s_H(u) = v$. On a $u = \frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{2}(u - v)$ et $u + v \in H$ et $(u - v)$ normal à H

donc $s_H(u) = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{1}{2}(u - v) = v$.

b: Soit s une réflexion par rapport à un hyperplan H' vérifiant $s(u) = v$. On a donc $s(v) = u$ et donc $s(u - v) = v - u$. On en déduit que $v - u$ est orthogonal à H' qui est un hyperplan et donc $H' = H$ d'où $s = s_H$.

Exercice 2 (Ccinp) Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1)$ noté $(P|Q)$

1. Montrer que cette égalité définit un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$.

(a) Montrer que $F = \text{vect}(1)^\perp$.

(b) Déterminer la distance de X à F .

Solution de l'exercice:

1: Seul point délicat: supposons $(P|P) = 0$ avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\sum_{k=0}^n (P^{(k)}(0))^2 = 0$ donc $P^{(k)}(0) = 0$ pour

$0 \leq k \leq n$. donc 1 est racine de P de multiplicité au moins $n + 1$. Or $\deg(P) \leq n$ donc $P = 0$.

2a Posons $P_0 = 1$. On a $P_0(1) = 0$ et $P_0^{(k)}(1) = 0$ donc $(P_0|P) = 0 \Leftrightarrow P(1) = 0$ donc $F = \text{vect}(1)^\perp$.

2b On a $d(X, E) = \|X - p(X)\|$ où p est la projection orthogonale sur F .

Or $X - p(X) = q(X)$ projeté orthogonal de X sur $F^\perp = (\text{vect}(1)^\perp)^\perp = \text{vect}(1)$. (car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie)

$q(X) = (X|1)1$ car (1) est une base orthonormée de $\text{vect}(1)$

On a donc $d(X, E) = \|q(X)\| = \|(X|1)1\| = |(X|1)| \times \|1\| = 1$

Exercice 3 (ccinp) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si M est une matrice orthogonale, alors $|\det(M)| = 1$. La réciproque de cette propriété est-elle vraie?
2. Déterminer les matrices orthogonales et symétriques.
3. On suppose que M est antisymétrique.
Montrer que si $\lambda \in \text{sp}(M)$ alors $\lambda = 0$.
4. Donner un exemple de matrice orthogonale antisymétrique.
5. On suppose que M est antisymétrique et orthogonale.

a Montrer que n est pair.

b On pose $n = p$.

Montrer que M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la matrice $\left(\begin{array}{c|c} iI_p & 0_{p,p} \\ \hline 0_{p,p} & -iI_p \end{array} \right)$.

Solution de l'exercice:

1: Vu en cours

2: $\begin{cases} M^T \times M = I_n \\ M^T = M \end{cases} \implies M^2 = I_n$ donc M est une matrice de symétrie.

L'endomorphisme f canoniquement associée à M (on suppose $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel).

- est une symétrie (par rapport $E_1(f)$ parallèlement à $E_{-1}(f)$.)

- est auto-adjoint car M est symétrique et la base canonique est orthonormé.

Les sous-espaces propres sont orthogonaux donc $E_1(f) \perp E_{-1}(f)$.

On en déduit que f est une symétrie orthogonale.

Réciproquement, si f est une symétrie orthogonale alors f est une isométrie et est autoadjoint (cours)

donc $\begin{cases} M^T \times M = I_n \\ M^T = M \end{cases}$.

Conclusion: Les solutions sont les matrices canoniquement associées à une symétrie orthogonale.

3: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale et antisymétrique.

4: Soit $\lambda \in \text{sp}(M)$ et X vecteur propre associé.

D'une part, $(MX|X) = (\lambda X|X) = \lambda \|X\|^2$

d'autre part $(MX|X) = (MX)^T X = X^T M^T X = -X^T (MX) = -(X|MX)$ donc $(MX|X) = 0$.

On en déduit que $\lambda \|X\|^2 = 0$ donc $\lambda = 0$ (car $X \neq 0$). 4a Si M est orthogonale et antisymétrique alors

$\begin{cases} M^T M = I_n \\ M^T = -M \end{cases}$

donc $M^2 = -I_n$ donc $\det(M)^2 = (-1)^n \geq 0$ donc n est pair.

5 On a $(M)^T = -M$ donc $M^2 = M \times (-M^T) = -MM^T = -I_n$ car $M \in O(n)$

$(M^2 + I_n) = 0$ donc $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de M .

Or $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En utilisant le fait que $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$, un raisonnement sur les multiplicités des valeurs propres permet de conclure (raisonnement déjà vu sur un autre exemple) pendant les révisions)

Exercice 4 (ccp psi): Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A \times A^T \times A = I_n$.
Montrer que A est inversible et symétrique. En déduire la valeur de A .

Solution de l'exercice: On a $A \times (A^T \times A) = I_n$, alors A est inversible d'inverse $S = A^T \times A$.
On a $S^T = S$ donc S est symétrique et est inversible (c'est l'inverse de A).
On a $(S^{-1})^T = (S^T)^{-1} = S^{-1}$ (l'inverse d'une matrice symétrique est symétrique)
Or $A = S^{-1}$ donc A est symétrique.
On a donc $A^3 = I_n$ donc $sp(A) \subset \{1\}$, ensemble des racines du polynome annulateur $X^3 - 1$.
La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable et $sp(A) = \{1\}$ donc $A = I_n$.

Exercice 5 Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et M la matrice définie par blocs par $M = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -U^T \\ \hline U & I_n \end{array} \right)$.

1. Montrer que la matrice UU^T est diagonalisable et vérifie $sp(UU^T) \subset \mathbb{R}_+$.
2. Calculer $M^T \times M$. En déduire que M est inversible.
3. Montrer que $M^{-1} \times M^T$ est une matrice orthogonale.

Solution de l'exercice:

1: On a bien $UU^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(UU^T)^T = UU^T = N$ donc N est symétrique réelle donc diagonalisable.
Soit $\lambda \in sp(UU^T)$ et X un vecteur propre associé. On a $X^T UU^T X = X^T U (X^T U)^T = (X^T U)^2$ car $X^T U \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc est réel. De plus, $X^T N X = X^T \lambda X = \lambda \|X\|^2$ donc $\lambda = \frac{(X^T U)^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

2: On a $M^T \times M = \left(\begin{array}{c|c} 1 & U^T \\ \hline -U & I_n \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & -U^T \\ \hline U & I_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 + U^T U & 0 \\ \hline 0 & I_n + UU^T \end{array} \right)$ donc $\det(M^T \times M) = (1 + U^T U) \times \det(I_n + UU^T)$.

D'une part $1 + U^T U = 1 + \|U\|^2 \geq 1$

D'autre part, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que part, $P^{-1}(UU^T)P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ d'après la première question donc $P^{-1}(I_n + UU^T)P = \text{diag}(1 + \lambda_1, \dots, 1 + \lambda_n)$ donc $\det(I_n + UU^T) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq 1$.

donc $\det(M^T \times M) \geq 1$ donc $M^T \times M$ est inversible donc M est inversible.

3: Soit $B = M^{-1} \times M^T$.

On a $B \times B^T = (M^{-1} \times M^T) \times (M^{-1} \times M^T)^T = M^{-1} \times M^T \times M \times (M^{-1})^T = M^{-1} \times M^T \times M \times (M^T)^{-1}$.

On remarque que $M \times M^T = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -U^T \\ \hline U & I_n \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & U^T \\ \hline -U & I_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 + U^T U & 0 \\ \hline 0 & I_n + UU^T \end{array} \right)$ donc $M^T \times M = M \times M^T$.

On en déduit que $B \times B^T = M^{-1} \times M \times M^T \times (M^T)^{-1} = I_{n+1}$ donc B est une matrice orthogonale.

Exercice 6 (Ccinp) : Soit p un projecteur orthogonal de rang r d'un espace euclidien E de dimension n et de base orthonormale $b = (e_1, \dots, e_n)$. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\|^2 = (p(x) | x)$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.

Solution de l'exercice: Soit p un projecteur orthogonal sur F .

On a $\forall x \in E, (p(x) | x) = (p(x) | p(x) + (p(x) | x - p(x))) = \|p(x)\|^2 + (p(x) | (x - p(x))) = \|p(x)\|^2$
car $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$.

On en déduit que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n (p(e_i) | e_i)$.

Soit $M = \text{mat}_b(p)$. La base b est orthonormée donc $m_{i,j} = (p(e_j) | e_i)$ ($i^{\text{ème}}$ coordonnée de $p(e_j)$ dans b).

On a donc $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n m_{i,i} = \text{tr}(p)$.

D'après le cours $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$ car p est un projecteur donc $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \text{rg}(p)$.

Exercice 7 (centrale) Soit un entier $n \geq 2$.

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que:

$$\exists (M_1, M_2) \in (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))^2, \forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(AM_1) \leq \text{Tr}(AM) \leq \text{Tr}(AM_2)$$

3. On considère l'application $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ M & \mapsto \text{Tr}(M) \end{cases}$.

Déterminer $f(O_n(\mathbb{R}))$ (on pourra distinguer le cas n pair et le cas n impair).

4. On suppose que $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ M & \mapsto \text{Tr}(AM) \end{cases}$.

Solution de l'exercice:

1: $O_n(\mathbb{R})$ est borné: Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors pour tout (i, j) , $|a_{i,j}| \leq 1$ car $\|C_j\| = 1$.

$O_n(\mathbb{R})$ est fermé:

Soit (A_p) une suite de $O_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a $\lim_{p \rightarrow +\infty} A_p^T = A^T$ (continuité de la transposition: application linéaire entre ev de dim finie) donc $I_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} A_p^T \times$

$A_p = A^T \times A$ (continuité du produit matriciel) donc $A \in O_n(\mathbb{R})$.

2: L'application $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ M & \mapsto \text{tr}(AM) \end{cases}$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc f est continue.

L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné donc f est bornée et atteint ses bornes soit

$$\exists (M_1, M_2) \in (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))^2, \forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(AM_1) \leq \text{Tr}(AM) \leq \text{Tr}(AM_2)$$

3: Or si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $|m_{i,j}| \leq 1$ donc $\text{tr}(M) \in [-n, n]$ (le raisonnement avec les fermés bornés est donc inutile ici).

• Si $n = 2p$. On a $f(O_{2p}(\mathbb{R})) \subset [-2p, 2p]$. Posons $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$. On a $\text{tr}(R_\theta) = 2 \cos(\theta)$ qui décrit $[-2, 2]$ lorsque θ décrit $[0, \pi]$.

Soit M la matrice diagonale par blocs $M_\theta = \begin{pmatrix} R_\theta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_\theta \end{pmatrix}$. On a $\text{tr}(M_\theta) = n \times 2 \cos(\theta)$.

Or l'image de \mathbb{R} par la fonction cosinus est $[-1, 1]$ donc $f(O_2(\mathbb{R})) = [-2, 2]$.

• Si $n = 2p + 1$. On a $f(O_{2p}(\mathbb{R})) = [-2p, 2p]$.

Posons $A_\theta = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M_\theta \end{array} \right) \in O_{2p+1}(\mathbb{R})$ et $B_\theta = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & M_\theta \end{array} \right) \in O_{2p}(\mathbb{R})$

D'après Q2, $\{f(A_\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = \{1 + 2p \cos(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = [-2p + 1, 2p + 1]$ et $\{f(B_\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = \{-1 + 2p \cos(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = [-2p - 1, 2p - 1]$ donc $[-2p - 1, 2p + 1] \subset f(O_{2p+1}(\mathbb{R}))$ donc $f(O_{2p+1}(\mathbb{R})) = [-2p - 1, 2p + 1]$.

On a donc $f(O_n(\mathbb{R})) = [-n, n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4: On a $M \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow AM \in O_n(\mathbb{R})$ car $A \in O_n(\mathbb{R})$ donc $f_A(M) = f(AM) \in [-n, n]$.

Soit $x \in [-n, n]$.

D'après la question précédente, $\exists N \in O_n(\mathbb{R}), \text{tr}(N) = x$.

Posons $M = A^{-1}N$. On a $f_A(M) = \text{tr}(AA^{-1}N) = x$ donc $f_A(O_n(\mathbb{R})) = [-n, n]$.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

1. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ distincte de I_n qui est symétrique, inversible et est semblable à A^{-1} .

2. Donner une condition pour qu'une matrice diagonale et inversible soit semblable à son inverse.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est symétrique, inversible est semblable à A^{-1} , alors $\text{tr}(A^2) \geq n$.

Solution de l'exercice:

1: Si $n = 2$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est symétrique inversible d'inverse $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est semblable à A

(inverser l'ordre des vecteurs de base). On peut prendre $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array} \right)$ dans le cas n quelconque.

2: Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale inversible. On a $D^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$.

• Si D est semblable à D^{-1} , ces deux matrices ont même polynôme caractéristique donc $\lambda \in \text{sp}(D)$ est présent le même nombre de fois dans la diagonale de D et celle de D^{-1} , ce qu'on peut traduire par:

Il existe σ , bijection de $[[1, n]]$ dans lui même telle que $\forall i \in [[1, n]], \lambda_i^{-1} = \lambda_{\sigma(i)}$.

• Réciproquement, supposons qu'il existe σ , bijection de $[[1, n]]$ dans lui même telle que $\forall i \in [[1, n]], \lambda_i^{-1} = \lambda_{\sigma(i)}$. Soit f canoniquement associée à A et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

On a $f(e_{\sigma(i)}) = \lambda_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} = \lambda_i^{-1} e_{\sigma(i)}$ donc $\text{mat}_{(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}(f) = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) = D^{-1}$

3: A est symétrique, inversible donc semblable à une matrice diagonale inversible $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On a donc $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

Par hypothèse A est semblable à A^{-1} .

De plus A est semblable à D donc A^{-1} est semblable à D^{-1} (car $D = P^{-1}AP \Rightarrow D^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$) donc D est semblable à D^{-1} .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $n^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \times \lambda_i^{-1} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i^{-1})^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right)^2$ d'après la question précédente. On a donc $n \leq \text{tr}(A^2)$.

Exercice 9 (mines ponts) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ qu'on munit du produit scalaire

$$(A, B) \mapsto (A | B) = \int_0^1 A(t)B(t)dt.$$

Pour $P \in E$, on définit le polynôme $u(P)$ par $u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt$.

1. Montrer que u est linéaire et à valeurs dans E .

2. Montrer que u est autoadjoint.

3. Montrer que u est bijectif.

Solution de l'exercice:

Préliminaire: On peut vérifier rapidement que l'application $(A, B) \mapsto \int_0^1 A(t)B(t)dt$ définit bien un produit scalaire sur E .

En particulier, Soit $P \in E$ tel que $(P | P) = 0$, alors $\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$.

La fonction $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue sur $[0; 1]$ donc $\forall t \in [0; 1], P(t)^2 = 0$.

donc $P(t) = 0$ et P admet une infinité de racines donc $P = 0$. $(\cdot | \cdot)$ est donc bien un produit scalaire sur E .

1: • Soit $P \in E$, comme $t \mapsto (x+t)^n P(t)$ est continue sur le segment $[0; 1]$, $u(P)(x)$ est bien défini.

• De plus, si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $u(\lambda P + Q)(x) = \int_0^1 (x+t)^n (\lambda P(t) + Q(t))dt = \lambda \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt + \int_0^1 (x+t)^n Q(t)dt = \lambda u(P)(x) + u(Q)(x)$

L'égalité précédente est vraie pour tout x donc $\overline{u(\lambda P + Q)} = \lambda \overline{u(P)} + \overline{u(Q)}$ donc u est un endomorphisme de E .

• Par le binôme de NEWTON, $\forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k t^{n-k} \right) P(t)dt = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k} P(t)dt \right) x^k : (\mathcal{R})$

(par linéarité de l'intégrale) donc $\overline{u(P)} \in \overline{E}$.

2. Pour $(P, Q) \in E^2$, avec l'expression de b., $(u(P) | Q) = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 u^{n-k} P(u) du \right) t^k Q(t) dt$ donc, par linéarité de l'intégrale, on a $(u(P) | Q) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^{n-k} | P) \int_0^1 t^k Q(t) dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^{n-k} | P) (X^k | Q)$.

En effectuant le changement d'indice $j = n - k$, on a $(u(P) | Q) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (X^i | P) (X^{n-i} | Q) = (u(Q) | P)$ avec le calcul précédent car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ainsi, $(u(P) | Q) = (P | u(Q))$ par symétrie donc u est autoadjoint.

3. La relation $(\mathcal{R}) \forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k} P(t) dt \right) x^k$ donne les coefficients du polynôme $u(P)$

Comme u est un endomorphisme en dimension finie, u est bijectif si et seulement si u est injectif.

Soit $P \in \text{Ker}(u)$, on a donc $u(P) = 0$ donc $\forall k \in [[0, n]]$, $\binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k} P(t) dt = 0$

donc $\forall i \in [[0, n]]$, $\int_0^1 t^i P(t) dt = (P | X^i) = 0$.

On en déduit que $P \in (\text{vect}(1, X, \dots, X^n))^\perp = E^\perp = \{0_E\}$ donc $\text{Ker}(u) = \{0\}$, on a u injectif donc u bijectif.