

Exercice 1 CCINP PSI 2021: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Une secrétaire effectue une première fois un appel téléphonique vers chacun de ses n correspondants.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est p avec $p \in]0, 1[$.

On note $q = 1 - p$ et X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus après une série d'appels.

1. Donner la loi de X .

2. La secrétaire rappelle une seconde fois dans les mêmes conditions les $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre lors de la première série d'appels.

On note Y nombre de correspondants obtenus après la deuxième série d'appels et Z le nombre total de correspondants joints.

(a) Exprimer Z en fonction de X et Y . Préciser les valeurs possibles pour Z .

(b) Calculer $P(Z = 0)$. Montrer que $P(Z = 1) = npq^{2n-2}(1 + q)$.

(c) Soit $k \in [[0, n]]$. Calculer $P(Y = i | X = k)$.

(d) Montrer que si $0 \leq k \leq i \leq n$, alors $\binom{n-k}{i-k} \binom{n}{k} = \binom{i}{k} \binom{n}{i}$. En déduire que $P(Z = i) = \binom{n}{i} (q^2)^{n-i} (1 - q^2)^i$.

Solution de l'exercice:

1: X est le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli (indépendance des expériences "succès-échecs" de même loi) donc $X \rightsquigarrow B(n, p)$.

2a: On a $Z = X + Y$ et Z peut prendre toutes les valeurs dans $[[0, n]]$.

2b: On a $(Z = 0) = (X = 0) \cap (Y = 0)$ donc $P(Z = 0) = P(X = 0) \times P(Y = 0 | X = 0) = q^n \times q^n = q^{2n}$ et $(Z = 1) = (X = 0) \cap (Y = 1) \cup (X = 1) \cap (Y = 0)$.

Or $P((X = 1) \cap (Y = 0)) = P(X = 1) \times P(Y = 0 | X = 1) = npq^{n-1} \times q^{n-1}$

et $P((X = 0) \cap (Y = 1)) = P(X = 0) \times P(Y = 1 | X = 0) = q^n \times npq^{n-1}$

donc (union disjointe) $P(Z = 1) = npq^{n-1} \times q^{n-1} + q^n \times npq^{n-1} = npq^{2n-2}(1 + q)$.

2c: La loi de Y sachant $(X = k)$ est une loi binomiale $B(n - k, p)$ (nombre de succès lors de $n - k$ expériences indépendantes "succès-échecs" de même loi).

Si $i \in [[0, n - k]]$, $P(Y = i | X = k) = \binom{n-k}{i} p^i q^{n-k-i}$.

2d: En utilisant l'expression avec factorielles, on obtient $\binom{n-k}{i-k} \binom{n}{k} = \binom{i}{k} \binom{n}{i}$.

La famille $((X = k), 0 \leq k \leq n)$ est un système complet d'événements donc

$$P(Z = i) = \sum_{k=0}^n P(X = k) \times P(Y = i - k | X = k) = \sum_{k=0}^i P(X = k) \times P(Y = i - k | X = k)$$

$$\text{On en déduit que } P(Z = i) = \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \times \binom{n-k}{i-k} p^{i-k} q^{n-k-(i-k)} = \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} p^i q^{2n-k-i}.$$

$$\text{On a donc } P(Z = i) = \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \times \binom{n-k}{i-k} p^{i-k} q^{n-k-(i-k)} = \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} p^i q^{2n-k-i}$$

$$\text{Compte tenu de } \binom{n-k}{i-k} \binom{n}{k} = \binom{i}{k} \binom{n}{i}, P(Z = i) = \binom{n}{i} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} p^i q^{2n-k-i} = \binom{n}{i} p^i q^{2n-i} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} q^{-k}$$

$$\text{donc } P(Z = i) = \binom{n}{i} p^i q^{2n-i} \left(1 + \frac{1}{q}\right)^i = \binom{n}{i} (1 - q)^i q^{2n-2i} (q + 1)^i = \binom{n}{i} (q^2)^{n-i} (1 - q^2)^i.$$

Exercice 2 (Ccp) Soit $b = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $a = e_1 + e_2 + e_3$.

Donner la matrice, dans la base b , de la rotation vectorielle r d'axe vect(a) orienté par a et d'angle $\theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

Solution de l'exercice: Soit b la base canonique de \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel et orienté (avec la base canonique supposée directe)

Dans une BOND $b' = (u_1, u_2, u_3)$ dont le premier vecteur est colinéaire à a ,

$$\text{la matrice de } r \text{ est } R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \text{ car } \sin^2(\theta) = +\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \text{ car } \theta \in [0, \pi].$$

$$\text{On pose } u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ La famille } (u_1, u_2) \text{ est orthonormée.}$$

$$\text{Posons } u_3 = u_1 \wedge u_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}. \text{ D'après le cours, la famille } (u_1, u_2, u_3) \text{ est orthonormée directe.}$$

$$\text{En prenant } P_b^{b'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}, \text{ on a } M = \text{mat}_b(r) = PRP^{-1}.$$

Les bases b et b' sont orthonormées donc $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, $P^T = P^{-1}$ et on peut en déduire la matrice M .

Exercice 3 CCINP PSI 2024

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules (numéros de 1 à X) dans une urne, telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = i) = \frac{i}{2^{i+1}}$.

On procède à un tirage et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Montrer que la définition de la loi de X est cohérente.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Déterminer la loi conjointe de X et Y .
4. Calculer la loi de Y et son espérance.

Solution de l'exercice:

1.: Il s'agit juste de vérifier que pour $\mathbb{P}(X = i) \geq 0$ pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$, ce qui est évident, et que $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = 1$, ce qui l'est moins.

Pour $x \in]-1; 1[$, posons $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

On peut dériver terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence de cette série entière de rayon de convergence 1/

On a $\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ donc $x^2 f'(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n+1}$.

En prenant $x = \frac{1}{2}$ dans cette relation, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \frac{1/4}{1/4} = 1$.

2 En reprenant la fonction f de la question précédente et en dérivant une fois de plus, on obtient, pour $x \in]-1; 1[$,

$$, f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} \text{ donc } x^3 f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n+1}$$

$$\text{donc } \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n+1} = x^3 f''(x) + x^2 f'(x) = \frac{2x^3}{(1-x)^3} + \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

En prenant $x = \frac{1}{2}$ à nouveau, on arrive à $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n+1}} = \frac{2(1/8)}{1/8} + \frac{1/4}{1/4} = 3.$

c. Comme on prélève une boule dans une urne n'ayant des boules numérotées que de 1 à X , la boule tirée à un numéro $Y \in [[1; X]]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [[1; n]]$, on a $\mathbb{P}(X = n, Y = k) = \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k)$ car $\mathbb{P}(X = n) > 0$ et on a $\mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k) = \frac{1}{n}$ car les n boules de l'urne ont autant de chances d'être prises. Par conséquent, $\mathbb{P}(X = n, Y = k) = \frac{\mathbb{P}(X=n)}{n} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Par ailleurs $\mathbb{P}(X = n, Y = k) = 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $k > n$.

d. On a clairement $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

La famille $(X = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un SCE donc, on a $\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = k)$ car $\mathbb{P}(X = n, Y = k) = 0$ si $n < k$.

$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^k}$. Ainsi, Y suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$. On sait d'après le cours que $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} = 2$ et que $\mathbb{V}(Y) = \frac{1-p}{p^2} = 2$.

Exercice 4 Ccp: Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est une matrice orthogonale.

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f . géométriquement.

Solution de l'exercice:

1: On remarque que $\|C_1\| = \|C_2\| = 1$, que $(C_1 | C_2) = 0$ et que $C_1 \wedge C_2 = C_3$ donc la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormale directe de \mathbb{R}^3 . La matrice M est donc une matrice de rotation.

2a Déterminons Δ l'axe de f , ensemble des vecteurs invariants par f .

$$\text{On a } MX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} . \text{ On obtient que } \Delta = \text{vect}(a) \text{ avec } a = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } c = a \wedge b = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La famille (a, b) est orthonormée donc (a, b, c) est orthonormée directe

$$\text{et } \text{mat}_{(a,b,c)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = M' \text{ où } \theta \text{ est l'angle de la rotation (l'axe étant orienté par } a).$$

On a donc $P^{-1}MP = M'$ avec $P = P_{(e_1, e_2, e_3)}^{(a, b, c)} \in SO_3(\mathbb{R})$ car (a, b, c) et (e_1, e_2, e_3) sont orthonormées directes. On

a donc $M' = P^T M P$. Le calcul de $P^T M P$ permet de voir que $\cos(\theta) = \frac{1}{6}$ et $\sin(\theta) > 0$ donc $\theta = \arccos\left(\frac{1}{6}\right)$

(calcul sans difficulté laissé au lecteur)

Remarque: $\text{tr}(M) = \text{tr}(M')$ donc $\cos(\theta) = \frac{1}{6}$ donc $\theta = \pm \arccos\left(\frac{1}{6}\right)$

Remarque: Une méthode plus courte a été vue en cours pour déterminer le signe de $\sin(\theta)$.

Exercice 5 CCINP PSI 2023

Une entreprise commercialise deux produits A et B .

Le service après-vente reçoit des appels concernant ces deux produits, 20% pour le produit A et 80% pour le produit B.

On note X_A (resp. X_B) la variable aléatoire qui compte le nombre d'appels avant d'en avoir un qui concerne le produit A (resp. B).

On note L la variable aléatoire qui compte la longueur de la première chaîne d'appels sur un même produit.

Par exemple, si on reçoit les appels AAABBAB..., alors $X_A = 1, X_B = 4, L = 3$.

1. Déterminer la loi de X_A . Justifier que X_A admet une espérance et une variance finies et les calculer. Faire de même pour X_B .
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que $\mathbb{P}(L = n) = 0,8 \times \mathbb{P}(X_A = n) + 0,2 \times \mathbb{P}(X_B = n)$.
3. En déduire que L admet une espérance finie et la calculer.

Solution de l'exercice:

1. X_A est le temps d'attente du succès (appel concernant le produit A) dans une répétition d'appels indépendants (on le suppose) qui suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{5}$. D'après le cours, X_A suit la loi géométrique de paramètre p .

D'après le cours, on a $\mathbb{E}(X_A) = \frac{1}{p} = 5$ et $\mathbb{V}(X_A) = \frac{q}{p^2} = 20$. De même, $x_B \sim \mathcal{G}(1-p)$ donc $\mathbb{E}(x_B) = \frac{1}{1-p} = \frac{5}{4}$ et $\mathbb{V}(x_B) = \frac{1-(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{5}{16}$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note l'évènement $A_k =$ "le k-ième appel concerne le produit A".

et l'évènement $B_k =$ "le k-ième appel concerne le produit B".

On a $(L = n) = (A_1 \cap \dots \cap A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_1 \cap \dots \cap B_n \cap A_{n+1}) = (X_B = n+1) \cup (X_A = n+1)$

Comme ces deux évènements sont incompatibles, on obtient la relation

$\mathbb{P}(L = n) = \mathbb{P}(X_B = n+1) + \mathbb{P}(X_A = n+1) = p^n(1-p) + (1-p)^n p$ d'après la question a..

On en déduit bien $\mathbb{P}(L = n) = (1-p)\mathbb{P}(X_A = n) + p\mathbb{P}(X_B = n) = 0,8\mathbb{P}(X_A = n) + 0,2\mathbb{P}(X_B = n)$.

3. Comme $n\mathbb{P}(L = n) = (1-p)n\mathbb{P}(X_A = n) + pn\mathbb{P}(X_B = n)$ et que les deux séries $\sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(X_A = n)$ et $\sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(X_B = n)$ puisque X_A et X_B admettent des espérances finies d'après le cours, on en déduit par somme que $\sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(L = n)$ converge (et absolument car elle est à termes positifs) donc L admet une espérance finie qui vaut $\mathbb{E}(L) = (1-p)\mathbb{E}(X_A) + p\mathbb{E}(X_B) = \frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p} = \frac{0,8}{0,2} + \frac{0,2}{0,8} = \frac{21}{5} = 4,25$.

Exercice 6 (Mine telecom) Soit u un vecteur non nul fixé de \mathbb{R}^3 .

1. Donner l'image et le noyau de $f : x \mapsto u \wedge x$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie de base B et (u_n) une suite de $\mathcal{L}(E)$.
On pose $M_n = \text{mat}_B(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la suite (M_n) converge.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \sum_{k=0}^n \frac{f^k}{k!}$. Montrer que la suite (g_n) converge vers un endomorphisme g à préciser.

Solution de l'exercice: Il est implicite dans cet énoncé que \mathbb{R}^3 est muni de son produit scalaire usuel et de son orientation usuel (un produit scalaire et une orientation sont nécessaire pour définir le produit vectoriel).

1: D'après le cours:

On a $u \wedge x = 0 \Leftrightarrow x \in \text{vect}(u)$ donc $\ker(f) = \text{vect}(u)$.

Soit $y \in \text{Im}(f) : \exists x \in \mathbb{R}^3, y = u \wedge x$: donc $y \in \text{vect}(u)^\perp$. On a donc $\text{Im}(f) \subset \text{vect}(u)^\perp$.

Le théorème du rang et le fait que $\text{vect}(u) \oplus \text{vect}(u)^\perp = \mathbb{R}^3$ entraîne que $\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\text{vect}(u)^\perp)$.

On a donc $(\text{Im}(u)) = \text{vect}(u)^\perp$.

2. L'application $\phi : u \mapsto \text{mat}_b(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Sa réciproque $\phi^{-1} : M \mapsto u$ tel que $\text{mat}_b(u) = M$ est aussi linéaire et les espaces sont de dimension finie donc ϕ

et ϕ^{-1} sont continues.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(u_n) = \phi(u)$ car ϕ est continue donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \text{mat}_B(u)$.

La réciproque se montre de la même façon en utilisant la continuité de ϕ^{-1} .

3: Soit e_1 un vecteur unitaire colinéaire et de même sens que u qu'on complète en une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) .

On a $e_1 \wedge e_2 = e_3$ et $u = \|u\| e_1$ donc $f(e_2) = \|u\| e_3$. On en déduit que

$$\text{mat}_b(f) = \|u\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A. \text{ On a } A^2 = -\|u\|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \|u\| J \end{array} \right) \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $J^2 = -I_2$ donc $J^{2p} = (J^2)^p = (-1)^p I_2$ et $J^{2p+1} = (-1)^p J$

$$\text{si } p \in \mathbb{N}^*, A^{2p} = (-1)^p \|u\|^{2p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \text{ et } A^{2p+1} = (-1)^p \|u\|^{2p+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}.$$

$$\text{On pose } g_n = \sum_{k=0}^n \frac{f^k}{k!}. \text{ Posons } M_n = \text{mat}_b(g_n) = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} = I_3 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$\text{Or } A^{2p} = \text{et On en déduit que } M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k \|u\|^{2k}}{(2k)!} & - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k \|u\|^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k \|u\|^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k \|u\|^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}.$$

En utilisant le développement en série entière $\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ et celui du sinus,

$$\text{on obtient } \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\|u\|) & -\sin(\|u\|) \\ 0 & \sin(\|u\|) & \cos(\|u\|) \end{pmatrix} = M = \text{mat}_b(r) \text{ avec } r \text{ la rotation d'axe } \text{vect}(u) \text{ orienté}$$

par u et d'angle $\|u\|$.

En utilisant la question 2, on déduit que la suite (g_n) converge vers r .

Exercice 7 Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à une urne contenant n boules non discernables numérotées de 1 à n .

On effectue des tirages et, à chaque tirage, on supprime de l'urne les boules dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule tirée.

On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider entièrement l'urne.

1. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

2. Montrer que $\forall n \geq 2, \mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$.

3. Montrer que $\mathbb{E}(X_n)$ est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice:

Notons pour toute la suite T_1 la variable aléatoire qui est le résultat du premier tirage.

Par construction, $X_n(\Omega) \subset \llbracket 1; n \rrbracket$ donc X_n est bornée et admet donc une espérance finie.

1: • Si $n = 1$, on vide l'urne en un seul tirage de manière certaine donc $X_1 \equiv 1$ et $\mathbb{E}(X_1) = 1$.

• Si $n = 2, (X_2 = 1) = (T_1 = 1)$ et $(X_2 = 2) = (T_1 = 2)$

donc $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(T_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(T_1 = 2) = \frac{1}{2}$.

On en déduit $\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$.

2.: Soit $n \geq 2$.

• Si $i = 1$, on a $(X_n = 1) = (T_1 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$.

• Si $i \in [[2; n]]$, la formule des PT avec le SCE $((T_1 = j))_{1 \leq j \leq n}$ donne

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(T_1 = j) \mathbb{P}(X_n = i | T_1 = j) = \mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{j=2}^n \mathbb{P}(T_1 = j) \mathbb{P}(X_n = i | T_1 = j)$$

car $\mathbb{P}(X_n = i | T_1 = 1) = 0$.

Or, quand on a tiré la boule j au premier tirage, on enlève les boules numérotées $j, j+1, \dots, n$

et on se retrouve une urne contenant les boules numérotées de 1 à $j-1$,

et $(X_n = i)$ revient à dire que la nouvelle urne avec $j-1$ boules sera vidée en $i-1$ tirages exactement.

Ainsi, $\mathbb{P}(X_n = i | T_1 = j) = \mathbb{P}(X_{j-1} = i-1)$. Par conséquent, si $i \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \mathbb{P}(X_{j-1} = i-1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = i-1)$$

Alors, $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^n i \mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{n} \times 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n i \times \left(\sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(X_k = i-1) \right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=2}^n i \mathbb{P}(X_k = i-1)$ en inversant la somme double.

Mais $\mathbb{P}(X_k = i-1) = 0$ dès que $i > k$ donc $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=2}^{k+1} i \mathbb{P}(X_k = i-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k (i+1) \mathbb{P}(X_k = i)$.

Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k (i+1) \mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(X_k = i) \right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{E}(X_k) + 1)$ car $X_k(\Omega) = [[1, k]]$.

On a donc bien la relation attendue, $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$ si $n \geq 2$.

3 Méthode 1 : d'après b., on a $\mathbb{E}(X_3) = 1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

De même, on obtient $\mathbb{E}(X_4) = 1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$.

Il semble que $\mathbb{E}(X_n) = H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On a déjà réalisé l'initialisation. Soit $n \geq 2$ tel que $\forall k \in [[1; n-1]], \mathbb{E}(X_k) = H_k$.

D'après Q2, on a $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}$

donc $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{j} = 1 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \right) - \frac{n-1}{n} = H_n$.

Par principe de récurrence forte, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X_n) = H_n$ donc $\mathbb{E}(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ (voir (*) en fin d'exercice)

Méthode 2 : d'après Q2, pour $n \geq 2, n\mathbb{E}(X_n) = n + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$ et $(n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}) = (n+1) + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)$

donc $(n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}) - n\mathbb{E}(X_n) = 1 + \mathbb{E}(X_n)$ donc $(n+1)(\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n)) = 1$ d'où $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n+1}$.

Par télescopage, on a donc $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k)) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n$.

(*) comme $f: t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[1; +\infty[$, on a la majoration

$\forall k \in [[1; n]], \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq f(k) = \frac{1}{k}$ et $\forall k \in [[2; n]], \int_{k-1}^k \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{k}$.

En sommant la première inégalité pour $k \in [[1; n]]$ et par CHASLES, on obtient $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Si on fait de même pour la seconde pour $k \in [[2; n]]$ on a $\int_1^n \frac{dt}{t} \geq H_n - 1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$.

Ainsi, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$. Comme $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ donc $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) + 1$.

On en déduit que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 8 Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\frac{1}{3}(I_n - 2M) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (MX|X) = \|X\|^2$. Déterminer la matrice M .

Solution de l'exercice :

On a $\|MX\|^2 = \|X\|^2$ et $\left\| \frac{1}{3}(I_n - 2M)X \right\|^2 = \|X\|^2$ car M et $\frac{1}{3}(I_n - 2M)$ sont des matrices orthogonales..

Or $\frac{1}{9} \|X - 2MX\|^2 = \frac{1}{9} (\|X\|^2 - 4(MX|X) + 4\|MX\|^2) = \frac{5}{9} \|X\|^2 - \frac{4}{9} (MX|X)$ donc $(MX|X) = -\|X\|^2$.
 On remarque que $M = -I_n$ vérifie les conditions $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{3}(I_n - 2M) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $\frac{1}{3}(I_n - 2M) = I_n$.
 Montrons que c'est la seule. On a $(-MX|X) = \|X\|^2 = \|X\| \|-MX\|$ car $-M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
 On est donc dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sans valeurs absolues donc $-MX$ et X sont colinéaires et de même sens. Ils sont de même norme donc $-MX = X$ donc $M = -I_n$.

Exercice 9 On considère une puce se déplaçant sur les points d'un quadrillage identifié à \mathbb{Z}^2 . On note (X_n, Y_n) la position de la puce à l'instant n et on suppose que

- $X_0 = Y_0 = 0$,
- entre l'instant n et l'instant $n + 1$, la puce fait un saut aléatoire de longueur 1 dans l'une des 4 directions avec équiprobabilité des directions,
- les sauts sont indépendants les uns des autres.

On pose $Z_n = X_n + iY_n$ et pour $n \geq 1$, $\Delta_n = Z_n - Z_{n-1}$.

1. Préciser la loi de Δ_n . En déduire l'espérance de Z_n , X_n et Y_n .

2. Justifier que X_n et Y_n ont même loi. Calculer $E(|Z_n|^2)$.

3. En déduire que $E\left(\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}\right) \leq \sqrt{n}$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = P(X_n = Y_n = 0)$.

(a) Justifier que $p_{2n+1} = 0$.

(b) Montrer que $p_{2n} = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$.

(c) Exprimer p_{2n} à l'aide de $\binom{2n}{n}$.

Solution de l'exercice:

1: $\Delta_n \sim U(\{1, -1, i, -i\})$. On a $Z_n = \sum_{k=1}^n \Delta_k$ donc $E(Z_n) = \sum_{k=1}^n E(\Delta_k) = 0$. Or $E(Z_n) = E(X_n) + iE(Y_n)$ donc

$E(X_n) = E(Y_n) = 0$.

2: Posons $\Delta'_n = -i\Delta_n$. On a $\Delta'_n \sim U(\{1, -1, i, -i\})$ et $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ sont indépendantes donc $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_n)$ sont indépendantes donc $f(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ et $f(\Delta'_1, \dots, \Delta'_n)$ ont même loi.

Or $X_n = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^n \Delta_k\right)$ et $Y_n = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^n \Delta'_k\right)$ donc X_n et Y_n ont même loi.

On a $E(|Z_n|^2) = E(Z_n \overline{Z_n}) = E\left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \times \sum_{l=1}^n \overline{\Delta_l}\right) = E\left(\sum_{(k,l) \in [[1,n]]^2} (\Delta_k \overline{\Delta_l})\right)$ donc

$E(|Z_n|^2) = \sum_{(k,l) \in [[1,n]]^2} E(\Delta_k \overline{\Delta_l}) = \sum_{k=0}^n E(\Delta_k \overline{\Delta_k}) = n$ car si $k \neq l$, $E(\Delta_k \overline{\Delta_l}) = E(\Delta_k) E(\overline{\Delta_l}) = 0$ par indépendance.

3: L'inégalité de Cauchy-Schwarz, $E\left(\sqrt{X_n^2 + Y_n^2} \times 1\right)^2 \leq E(X_n^2 + Y_n^2) E(1^2) = n$ (ou $V\left(\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}\right) \geq 0$).

4a: $(X_n = Y_n = 0) \Rightarrow$ "il y a autant de sauts vers la gauche que vers la droite et autant de sauts vers le haut que vers le bas donc $(X_n = Y_n = 0) \Rightarrow n$ est pair donc $p_{2n+1} = 0$.

4b: $(X_{2n} = Y_{2n} = 0) \Leftrightarrow$ il existe $k \in [[0, 2n]]$ tel que pendant les $2n$ premiers sauts, il y a k sauts vers la gauche, k vers la droite, $n - k$ vers le haut et $n - k$ vers le bas.

Il y a $\binom{2n}{k} \binom{2n-k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$ façons de choisir à quel saut on aura k sauts vers la gauche, k vers la droite, $n - k$ vers le haut et $n - k$ vers le bas et la probabilité d'une quelconque de ces réalisations est de $\frac{1}{4^n}$. Par probabilité d'une

union disjointe, $p_{2n} = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$.

$$4c: p_{2n} = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k!^2 \times (n-k)!^2} = \frac{1}{4^{2n}} \frac{(2n)!}{n!^2} \sum_{k=0}^n \frac{n!^2}{k!^2 \times (n-k)!^2} = \frac{1}{4^{2n}} \frac{(2n)!}{n!^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^{2n}} (2n)^2 \quad (\text{égalité } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n} \text{ vue dans un exercice précédent}).$$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES TRES CLASSIQUES

Exercice 10 (Ccp 2016) Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E vérifiant $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|y) = -(x|f(y))$.
2. En déduire que la matrice de f dans une base orthonormée est antisymétrique.
3. Comparer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)^\perp$.
4. Montrer que $f \circ f$ est diagonalisable.

Solution de l'exercice:

1: $(f(x+y)|x+y) = (f(x) + f(y)|x+y) = (f(x)|x) + (f(y)|x) + (f(x)|y) + (f(y)|y) = 0$. On en déduit que $(f(x)|y) = -(x|f(y))$.

2: Soit $x \in \ker(f)$ et $y \in \text{Im}(f)$. Il existe $t \in E, y = f(t)$.

On a $(x|y) = (x|f(t)) = -(f(x)|t) = 0$ car $x \in \ker(f)$ donc $\ker(f) \subset \text{Im}(f)^\perp$

Or $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(f)^\perp)$ donc $\dim(\ker(f)) = \dim(\text{Im}(f)^\perp)$ et $\ker(f) = \text{Im}(f)^\perp$.

3: On a $(f^2(x)|y) = -(f(x)|f(y)) = (x|f^2(y))$. donc $f \circ f$ est un endomorphisme auto-adjoint donc diagonalisable.

Exercice 11 (Centrale) Calculer $\inf_{a,b,c} \sqrt{\int_{-1}^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt}$ (on pourra interpréter ce nombre comme étant la distance d'un point à un sous-espace).

Solution de l'exercice 1: Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$. On cherche $\inf_{a,b,c} \|X^3 - (aX^2 + bX + c)\| = \inf_{P \in \mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - P\|$. D'après le cours, cette borne inférieure est atteinte pour P , projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. le polynôme P est le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $P = aX^2 + bX + c$ et $X^3 - P \perp \mathbb{R}_2[X]$ c'est à dire $(X^3 - P|X^i) = 0$ pour $i = 0, 1, 2$.

$$\text{Or } (X^3 - P|X^0) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 t^3 - (at^2 + bt + c) dt = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}a - 2c = 0$$

$$(X^3 - P|X) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 (t^3 - (at^2 + bt + c)) t dt = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5} - \frac{2}{3}b = 0.$$

$$(X^3 - P|X^2) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 (t^3 - (at^2 + bt + c)) t^2 dt = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}c - \frac{2}{5}a = 0. \text{ le minimum est atteint pour } a = 0, b = \frac{3}{5}$$

$$\text{et } c = 0. \text{ Ce minimum vaut } \int_{-1}^1 (t^3 - \frac{3}{5}t)^2 dt = \frac{8}{175}.$$