Vendredi 22 mai 2026

Exercice 1 *Ccinp: Trois enfants A,B et C jouent à la balle:*

- *A envoie la balle à B avec une probabilité de* $\dfrac{3}{4}$ *et à C avec une proba de* $\dfrac{1}{4}$.
- *B envoie la balle à A avec une probabilité de* $\dfrac{3}{4}$ *et à C avec une proba de* $\dfrac{1}{4}$.
- *C envoie toujours la balle à B. On note* a_n, b_n *et* c_n *les probabilités que A,B ou C ait la balle à la* $n^{\text{ième}}$ *étape.*

1. *Exprimez* a_{n+1}, b_{n+1} *et* c_{n+1} *en fonction de* a_n, b_n *et* c_n.
2. *Trouvez une matrice* M *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
3. *Déterminez la limite de* $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ *quand* $n \to +\infty$ *et montrez que cette limite est indépendante des conditions initiales.*

Solution de l'exercice: Q1 et 2: Soit A_n, B_n et C_n les événements "la balle est en A (respectivement B et C) à la $n^{\text{ième}}$ étape.
on a $P(A_{n+1}|A_n) = 0$, $P(B_{n+1}|A_n) = \dfrac{3}{4}$, $P(C_{n+1}|A_n) = \dfrac{1}{4}$,
$P(A_{n+1}|B_n) = \dfrac{3}{4}$, $P(B_{n+1}|B_n) = 0$, $P(C_{n+1}|B_n) = \dfrac{1}{4}$ et
$P(A_{n+1}|C_n) = 0$, $P(B_{n+1}|C_n) = 0$ et $P(C_{n+1}|C_n) = \dfrac{1}{4}$.
La formule des probabilités totales avec le SCE (A_n, B_n, C_n) donne
$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)P(C_n)$ et donc $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n$.
En faisant de même pour B_{n+1} et C_{n+1},

On obtient $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.avec $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

3: Soit $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
Remarque: On a $X_{n+1} = AX_n$. Si (X_n) converge vers L, alors, en passant à la limite dans la relation précédente, $L = AL$.
a: Convergence de (X_n): On montre par récurrence que $X_n = A^n X_0$ avec .
On a $\varkappa_A(x) = \det(xI_3 - A) = (x-1)\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)$ donc $sp(A) = \left\{1, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right\}$ et A est diagonalisable.
Soit (U_1, U_2, U_3) une base de vecteurs propres associés respectivement à $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$
Posons $X_0 = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3$.

On a $X_n = A^n(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3) = \alpha_1 U_1 + \alpha_2\left(\frac{1}{4}\right)U_2 + \alpha_3\left(-\frac{3}{4}\right)^n U_3 \longrightarrow_{n\to+\infty} \alpha_1 U_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_1(A)$.

Remarque: On a $X_n \longrightarrow_{n\to+\infty} p(X_0)$ avec p projection sur $E_1(A)$ parallèlement à $E_{\frac{1}{4}}(A) \oplus E_{-\frac{3}{4}}(A)$

Or $E_1(A) = vect\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix}\right)$.

il existe λ tel que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix}$.

Or $\forall n$, $a_n + b_n + c_n = 1$ (car (A_n, B_n, C_n) est un SCE) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n + c_n = 1$ donc $a + b + c = 1$.

On en déduit que $\lambda = \dfrac{16}{35}$ donc (X_n) converge vers $\begin{pmatrix} \frac{12}{35} \\ \frac{16}{35} \\ \frac{7}{35} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 *(Ccinp) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Rappeler la définition du :produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (I_3, J) est une famille orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*
3. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonal de A sur le sous-espace engendré par (I, J).*

Solution de l'exercice:

1: Pour la première question, voir le cours.

2: Rappel: Si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de l'espace euclidien E.

Pour $x \in E$ le vecteur $p(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} (x|e_i)\, e_i$ est le projeté orthogonal de x sur F

On a $tr\left({}^tI_3 \times J\right) = tr(J) = 0$ donc la famille (I_3, J) est une famille orthogonale.

3: Soit p la projection orthogonale sur $F = vect(I_3, J)$.

On a $\|I_3\| = \|J\| = \sqrt{3}$ donc $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} I_3, \dfrac{1}{\sqrt{3}} J\right)$ est une base orthonormée de F.

On en en déduit que $p(A) = \dfrac{(I_3|A)}{\|I_3\|^2} I_3 + \dfrac{(J|A)}{\|J\|^2} J = \dfrac{1}{3} I_3 + \dfrac{1}{3} J = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 *(IMT) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de même paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \dfrac{X}{Y}$.*

1. *Déterminer l'espérance de U.*
2. *Montrer que $E(U) > 1$.*
3. *Trouver la loi de U.*

Solution de l'exercice:

1: Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc $f(X) = X$ et $g(Y) = \dfrac{1}{Y}$ le sont aussi.

On a $0 \leq \dfrac{1}{Y} \leq 1$ donc $\dfrac{1}{Y}$ est d'espérance finie et $E(U) = E\left(X \times \dfrac{1}{Y}\right) = E(X) \times E\left(\dfrac{1}{Y}\right)$.

On a $\dfrac{1}{Y} \geq 0$ donc d'après la formule du transfert pour VA positives,

$E\left(\dfrac{1}{Y}\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} p q^{n-1} = \dfrac{p}{q} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} q^n = -\dfrac{p}{q} \ln(1-q)$.

On en déduit que $E(U) = -\dfrac{1}{p}\dfrac{p}{q} \ln(1-q) = -\dfrac{1}{q} \ln(1-q)$.

2: On sait que $\forall x>-1, \ln(1+x) \leq x$ et que l'égalité est vraie si et seulement si $x=0$ (inégalité de convexité)
On en déduit que $\ln(1-q)<-q$ donc $\dfrac{1}{q}\ln(1-q)<-\dfrac{1}{q}q$ donc $E(U)>1$.
3: On suppose que $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ donc $U(\Omega)\subset\mathbb{Q}_+^*$.
Soit $r=\dfrac{a}{b}$ avec $a,b\in\mathbb{N}^*$ sans facteurs communs (fraction irréductible).
On a $(U=r)=\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}((X=ak)\cap(Y=bk))$ (union disjointe) donc $P(U=r)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}P((X=ak)\cap(Y=bk))$ soit
$P(U=r)\underset{I}{=}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}P(X=ak)\times P(Y=bk)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}pq^{ak-1}\times pq^{bk-1}=\dfrac{p^2}{q^2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(q^{a+b}\right)^k=\dfrac{p^2q^{a+b-2}}{1-q^{a+b}}$.

Exercice 4 *Soit $x_0,\cdots,x_n$ des réels distincts.et $\mathcal{B}=\left((X+x_0)^n,\cdots,(X+x_n)^n\right)$ une famille de $\mathbb{R}_n[X]$.*

1. *Ecrire la matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique de de $\mathbb{R}_n[X]$..*
2. *En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*

Solution de l'exercice:
Par le binôme, $(X+x_j)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x_j^iX^{n-i}$, donc la matrice de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}_0=(1,X,\dots X^{n-1},X^n)$

est $M=\begin{pmatrix}\binom{n}{0}x_0^n & \cdots & \binom{n}{0}x_n^n\\ \binom{n}{1}x_0^{n-1} & & \binom{n}{1}x_n^{n-1}\\ \vdots & & \vdots\\ \binom{n}{n}x_0^0 & & \binom{n}{n}x_0^0\end{pmatrix}$ qui est quasiment une matrice de Vandermonde.

En utilisant la multilinéarité du déterminant, on a $\det(M)=\left(\prod\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\right)\times\begin{vmatrix}x_0^n & & x_n^n\\ x_0^{n-1} & & x_n^{n-1}\\ \vdots & & \vdots\\ x_0^0 & & x_0^0\end{vmatrix}$.
On permute les lignes de manière à obtenir une matrice de Vandermonde,
on aura $\det(M)=\pm\left(\prod\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\right)\times\prod_{0\leqslant j<j'\leqslant n}(x_{j'}-x_j)\neq 0$ car $x_0,\cdots,x_n$ deux à deux distincts.
Ainsi, comme M est inversible, $\mathcal{B}$ est une base de E.

Exercice 5 *(Ccinp) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B=\begin{pmatrix}A & 2A\\ A & 2A\end{pmatrix}$.*

1. *On suppose que $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.*
   - **a** *Justifier que A est diagonalisable et préciser son spectre.*
   - **b** *Montrer que 0 est valeurs propres de B et déterminer la dimension du sous-espace propre $E_0(B)$.*
   - **c** *Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Que peut-on dire de $\begin{pmatrix}X\\ X\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?*
   - **d** *En déduire que B est diagonalisable.*
   - **e** *Diagonaliser B.*
2. *Généraliser lorsque $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et de rang n.*

Solution de l'exercice: (Ccp 2015)
1a: Soit On suppose que $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.

On utilisera de plus que $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $tr\left(A\right)=2$ donc $sp\left(A\right)=\{3,-1\}$.

1b: Par ailleurs $C_3\left(B\right)=2C_1\left(B\right)$ et $C_4\left(B\right)=2C_2\left(B\right)$ donc $rg\left(B\right)\leq 2$ et $\left(C_1\left(B\right),C_2\left(B\right)\right)$ est libre car $\left(C_1\left(A\right),C_2\left(A\right)\right)$ est libre donc $rg\left(B\right)=2$.

On en déduit que $\dim\left(\ker\left(B\right)\right)=2$ donc 0 est valeur propre de B et $\dim\left(E_0\left(B\right)\right)=\dim\left(\ker\left(B\right)\right)=2$.

1c: Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

On a $B=\begin{pmatrix}A & 2A\\A & 2A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AX+2AX\\AX+2AX\end{pmatrix}=3\lambda\begin{pmatrix}X\\X\end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix}X\\X\end{pmatrix}\neq 0$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre 3λ.

Or A admet deux valeurs propres non nulles $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=3$

On a donc $\dim\left(E_0\left(B\right)\right)+\dim\left(E_{-3}\left(B\right)\right)+\dim\left(E_9\left(B\right)\right)\geq 2+1+1=4$.

donc B est-elle diagonalisable (et on a forcément $\dim\left(E_{-3}\left(B\right)\right)=\dim\left(E_9\left(B\right)\right)=1$ car la somme des dimensions des soous-espaces propres ne peut excéder 4).

1d: On a $C_3\left(B\right)=2C_1\left(B\right)$ donc $U_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\in\ker\left(B\right)$ et de même $U_2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix}\in\ker\left(B\right)$.

Or $\left(U_1,U_2\right)$ est libre donc est une base de $E_0\left(B\right)$ qui est de dimension 2.

D'après Q1c $U_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\in E_9\left(B\right)=vect\left(U_3\right)$ (pour des raisons de dimension)

On a $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ donc d'après Q1c $U_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\in E_{-3}\left(B\right)$.

On en déduit si $P=P_{B_0\rightharpoonup(U_1,U_2,U_3,U_4)}$ alors $P^{-1}BP=diag\left(0,0,9,-3\right)$.

2: Supposons maintenant que $A\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ et A est diagonalisable et de rang n.

On a $C_{n+1}\left(B\right)=2C_1\left(B\right)\ldots C_{2n}\left(B\right)=2C_n\left(B\right)$ donc $rg\left(B\right)\leq n$

et $\left(C_1\left(B\right),\ldots,C_n\left(B\right)\right)$ est libre car $\left(C_1\left(A\right),\ldots,C_n\left(A\right)\right)$ est libre donc $rg\left(B\right)=n$.

On en déduit que $\dim\left(E_0\left(B\right)\right)=2n-n=n$.

Soit $\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ une base de vecteurs propres de A, avec $AX_i=\lambda_iX_i$.avec $\lambda_i\neq 0$ car A est de rang n.

En posant $Y_i=\begin{pmatrix}X_i\\X_i\end{pmatrix}$, on a $BY_i=3\lambda_iY_i$ donc $\left(Y_1,\ldots,Y_n\right)$ une famille de n vecteurs propres de A associés à des valeurs propres non nulles.

La famille $\left(Y_1,\ldots,Y_n\right)$ est libre car $\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ est libre (car si $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iY_i=0_{2n,1}$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iX_i=0_{n,1}$.donc les a_i sont nuls)

donc $\sum\limits_{\lambda\in sp(A)}\dim\left(E_{3\lambda}\left(B\right)\right)\geq n$.

Or $\lambda\in sp\left(A\right)\Longrightarrow 3\lambda\neq 0$.

Or $\dim\left(E_0\left(B\right)\right)=n$ donc $\sum_{\mu\in sp(B)}\dim\left(E_\mu\left(B\right)\right)\geq n+n=2n$ donc B est diagonalisable.

Remarque *Une autre méthode (très classique et qu'on a vue en cours) pour traiter cet exercice serait:*

- *Diagonaliser la matrice* $\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$ *de spectre* $\{0,3\}$.
- *Copier la diagonalisation de* $\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$ *pour rendre* $M=\begin{pmatrix}A & 2A\\A & 2A\end{pmatrix}$.*semblable à* $M_1=\left(\begin{array}{c|c}0 & 0\\\hline 0 & 3A\end{array}\right)$.
- *En utilisant la diagonalisabilité de* A, *rendre* M_1 *semblable à* $\left(\begin{array}{c|c}0 & 0\\\hline 0 & 3D\end{array}\right)\begin{pmatrix}A & 2A\\A & 2A\end{pmatrix}$.*avec* D *diagonale semblable à* A.

Exercice 6 *(Mines) Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ une famille de réels distincts et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ une famille de réels.*

1. *Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(a_i) = b_i$.*

2. *Montrer qu'il existe une unique famille de $n+1$ réels $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telle que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)\,dt = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i)$.*

Solution de l'exercice: Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[\mathbb{X}] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$.
1: L'application φ est linéaire (découle de la linéarité de l'évaluation en un point).
Si $P \in \ker(\varphi)$ alors $\forall i,\ P(a_i) = 0$ donc P admet $n+1$ racines donc $P = 0$..
On en déduit que $\ker(\varphi) = \{0\}$ et, puisque $\dim(\mathbb{R}_n[\mathbb{X}]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, φ est un isomorphisme.
Il existe donc un et un seul $P \in \mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$ vérifiant $\varphi(P) = (b_0, \dots, b_n)$.
2: Posons, pour $P \in \mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$, $f_i(P) = P(a_i)$ et $f(P) = \int_0^1 P(x)\,dx$.
On demande de montrer que f peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire des f_i.
Les applications f et f_i sont linéaires (à vérifier) donc éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[\mathbb{X}], \mathbb{R})$ de dimension $n+1$.
Montrons que $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[\mathbb{X}], \mathbb{R})$.
Elle admet $n+1$ éléments. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre.
Supposons $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$. On a donc pour tout $P \in \mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$, $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i f_i\ (P) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i) = 0$.
Soit $i \in [|0, n|]$ fixé. En prenant P l'unique polynôme vérifiant $P(a_i) = 1$ et $P(a_j) = 0$ si $j \neq i$, on obtient $\lambda_i = 0$.
On en déduit que $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[\mathbb{X}], \mathbb{R})$ donc
il existe une unique famille de réels $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telle que $f = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i f_i : (R)$
La relation (R) équivaut à $\forall P \in E,\ f(P) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(P)$ soit $\int_0^1 P(x)\,dx = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i)$.

Exercice 7 *(centrale)*
On note E l'espace vectoriel complexe formé des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Soit un paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit $f_k \in E$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = x^k \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $f_0, f_1, \dots, f_n$.

1. *Déterminer la dimension de E_n.*

2. *Montrer que l'application $D_n : f \mapsto f'$ définit un endomorphisme de E_n.*

3. *a: Montrer que D_n est bijectif si et seulement si $\alpha \neq 0$.*
   b: Montrer plus généralement que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, l'endomorphisme $P(D_n)$ est bijectif si et seulement si α n'est pas racine de P.

4. *Soient deux polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ tels que $Q(\alpha) \neq 0$, et soit le polynôme $R = PQ$. Montrer que :*

$$\ker R(D_n) = \ker P(D_n).$$

5. *Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq n$.*
   Montrer que la matrice de l'endomorphisme $P(D_n)$ dans la base $f_0, f_1, \dots, f_n$ est:

$$M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \qquad avec\ m_{i,j} = \begin{cases} \binom{j}{i} P^{(j-i)}(\alpha) & si\ i \leqslant j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Attention : contrairement aux conventions habituelles, la numérotation des lignes et des colonnes commence à $\mathbf{0}$.

Solution de l'exercice:

1: Pour tout $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$, le polynôme $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n X^n$ a une infinité de racines, donc il est nul i.e. $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Donc $f_0, f_1, \ldots, f_n$ est libre, donc c'est une base de E_n et $\dim(E_n) = n+1$.

2: La linéarité de la dérivation est connue. Et: $D_n(f_k) = \begin{cases} \alpha f_k + k f_{k-1} & \text{si } k \geqslant 1 \\ \alpha f_k & \text{si } k = 0 \end{cases}$

Donc, pour tout $f \in E_n$, on a $D_n(f) \in E_n$.

3a et b: D'après la question précédente, la matrice de D_n dans la base $f_0, f_1, \ldots, f_n$ est:$M_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix}$.

Par propriété du produit de matrices triangulaires ,

$$(M_n)^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix} \text{ donc } P(M_n) = \begin{pmatrix} P(\alpha) & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & P(\alpha) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow P(\alpha) \neq 0.$$

Et ces matrices sont inversibles si et seulement si il n'y a pas de 0 sur la diagonale.

4: Comme $R = QP$, on a : $R(D_n) = Q(D_n) \circ P(D_n)$. D'après la question 3 l'endomorphisme $Q(D_n)$ est bijectif. On a donc :

$$R(D_n)(f) = 0 \Longleftrightarrow Q(D_n)(P(D_n)(f)) = 0 \Longleftrightarrow P(D_n)(f) = 0$$

5: Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ on a : $(D_n - \alpha\,\mathrm{Id})(f_k) = k f_{k-1}$ (en posant $f_k = 0$ si $k < 0$). Par récurrence, pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a :

$$(D_n - \alpha\,\mathrm{Id})^j(f_k) = k(k-1)\cdots(k-j+1) f_{k-j}.$$

En particulier, si $j > n$, on voit que $(D_n - \alpha\,\mathrm{Id})^j = 0$.

La formule de Taylor pour un polynôme P de degré d donne $P = \sum\limits_{i=0}^{d} \dfrac{P^{(i)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^i$.

On en déduit que $P(D_n) = \sum\limits_{i=0}^{d} \dfrac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(D_n - \alpha\,\mathrm{Id})^i$.

Première méthode: méthode vectorielle:

$P(D_n) = \sum\limits_{i=0}^{d} \dfrac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(D_n - \alpha\,\mathrm{Id})^i$ donc

- si $d < k$ alors $P(D_n)(f_k) = f_k + P'(\alpha) k f_{k-1} + \cdots + \dfrac{P^{(k-i)}(\alpha)}{i!} k(k-1) \times \cdots \times (k-i+1) f_{k-i} + \cdots + \dfrac{P^{(d)}(\alpha)}{d!} k(k-1) \times \cdots \times (k-d+1) f_{k-d}$
- si $d \geq k$ alors $P(D_n)(f_k) = f_k + P'(\alpha) k f_{k-1} + \cdots + \dfrac{P^{(k-i)}(\alpha)}{(k-i)!} k(k-1) \times \cdots \times (k-i+1) f_{k-i} + \cdots + \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} k(k-1) \times \cdots \times 1 \times f_0$

$P(D_n)(f_k) = \sum\limits_{i=0}^{\min(k,d)} \dfrac{P^{(k-i)}(\alpha)}{(k-i)!} \dfrac{k!}{i!} f_{k-i} = \sum\limits_{i=0}^{\min(k,d)} \binom{k}{i} P^{(k-i)}(\alpha) f_{k-i} = \sum\limits_{j=\max(0,k-d)}^{k} \binom{k}{j} P^{(j)}(\alpha) f_j$ (on a posé $j = k-i$).

On a donc $m_{i,k} = \binom{k}{i} P^{(k-i)}(\alpha)$ si $\max(0, k-d) \leq i \leq k$ et $m_{i,k} = 0$.

Avec l'hypothèse, $d \geq n$, on a $m_{i,k} = \binom{k}{i} P^{(k-i)}(\alpha)$ si $\max(0, k-d) \leq i \leq k$ et $m_{i,k} = 0$ sinon.

Deuxième méthode: Point de vue matriciel:

On a $P(D_n)=\sum\limits_{i=0}^{d}\dfrac{P^{(i)}(\alpha)}{i}(D_n-\alpha\,\mathrm{Id})^i$ donc $mat_{(f_0,\ldots,f_n)}(P(D_n))=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}\left(mat_{(f_0,\ldots,f_n)}(D_n-\alpha\,\mathrm{Id})\right)^i$.

Or $M'=mat_{(f_0,\ldots,f_n)}(D_n-\alpha\,\mathrm{Id})=\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & n\\ 0 & \cdots & & \alpha\end{pmatrix}$ et on peut calculer $(M')^k$:

Soit u canoniquement associé à M' et $(e_0,\ldots,e_n)$ la base canonique

• Si $j\geq k$ alors $e_j\mapsto je_{j-1}\mapsto j(j-1)e_{j-2}\cdots\mapsto j(j-1)(j-k+1)e_{j-k}$

donc $u^k(e_j)=\begin{cases}\dfrac{j!}{(j-k)!}e_{j-k}\text{ si }k\leq j\\ =0\text{ si }k>j\end{cases}$ donc $(M')^k=\left(\begin{array}{c|c}0_{k,k} & \begin{pmatrix}k! & & & 0\\ & \dfrac{(k+1)!}{1!} & & \\ & & \dfrac{(k+2)!}{2!} & \\ 0 & & & \ddots\\ & & & \dfrac{n!}{(n-k)!}\end{pmatrix}\\ \hline 0 & 0_{n+1-k,n+1-k}\end{array}\right)$.

On en déduit la matrice $A=mat_{(f_0,\ldots,f_n)}(P(D_n))=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(M')^k$.

D'une part, $a_{i,j}=0$ si $i>j$.

D'autre part si $i\leq j$, $a_{i,j}$ est une combiaison linéaire de coefficients tous nuls sauf si $i=j-k$ et vaut $\dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\times\dfrac{j!}{(j-k)!}=\dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{(j-i)!}\times\dfrac{j!}{i!}=\binom{j}{i}\times P^{(k)}(\alpha)$.

Exercice 8 *(Mines ponts 25 transmis par un étudiant du lycée Michelet)*
Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On définit l'application $D:E\to E$ par :

$$D((u_n))=(u_{n+1}-u_n)$$

1. *Montrer que D est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? surjectif ?*
2. *Trouver les valeurs propres de D et les vecteurs propres associés.*
3. *Soit $F=\{(u_n)\in E\mid\sum u_n^2$ converge $\}$. On définit, pour $\mathrm{u},\mathrm{v}\in F$, $\langle u,v\rangle=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_nv_n$: (i)*
   (a) Montrer que F est stable par D
   (b) Montrer que l'égalité (i) définit un produit scalaire de F.
   (c) Soit $G=\left\{\dfrac{<u,D(u)>}{\|u\|^2};\mid u\in F\right\}$. Montrer $G\subset[-2,0]$.
   (indication considérer $\dfrac{<u,s(u)>}{\|u\|^2}$ avec $s=D+id_E$.

Solution de l'exercice:

Dans tout l'exercice, on note u une suite et u_n son terme général.

1. Soit $(u,v)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Posons $w=\lambda u+\mu v$.
   On a $D(w)_n=w_{n+1}-w_n=(\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1})-(\lambda u_n+\mu v_n)=\lambda(u_{n+1}-u_n)=\lambda D(u)_n+\mu D(v)_n$.
   L'égalité $D(w)_n=\lambda D(u)_n+\mu D(v)_n$ est vraie pour tout n donc $D(w)=\lambda D(u)+\mu D(v)$ donc D est linéaire donc endomorphisme de E.
   Si u est une suite constante alors $D(u)$ est la suite nulle donc $\ker(D)\neq\{0\}$ donc D n'est pas injectif.
   Soit $v\in E$. Posons $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}v_i$.

Si $n=0$, $D(u)_0 = \sum_{i=0}^{0} v_i - u_0 = v_0$.–

Si $n \geq 1$, $D(u)_n = \sum_{i=0}^{n} v_i - \sum_{i=0}^{n-1} v_i = v_n$.

On a donc $D(u) = v$ donc D est surjectif.

2. La suite u est vecteur propre de Δ associée à λ si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \lambda u_n \text{ soit } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1+\lambda) u_n$$

On en déduit que tout réel λ est valeur propre de D de vecteur propre associé la suite $(1+\lambda)^n$.

3. Une question manque à l'énoncé: Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E (on ne peut définir de produit scalaire que dans un espace vectoriel!)

Soit $(u,v) \in F^2$. On a $0 \leq (u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n \leq (u_n^2 + v_n^2) + (u_n^2 + v_n^2)$, (inégalité $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$), ce qui entraîne par comparaison la convergence de la série $\sum (u_n + v_n)^2$ donc la stabilité de F par $+$.

Le reste est immédiat.

a) Soit $u \in F$. On a $0 \leq (u_{n+1} - u_n)^2 = u_{n+1}^2 + u_n^2 + 2u_n u_{n+1} \leq 2\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right)$ (comme précédemment) ce qui entraîne par comparaison la convergence de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)^2$ donc $D(u) \in F$.

b) La convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ résulte de Vérification sans problème

c) Posons $s = D + id_E$.

Pour $u \in F$, $s(u)_n = u_{n+1}$ donc $< u, s(u) > = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n u_{n+1}$. On a donc $|< u, s(u) >| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n u_{n+1}\right|$

Or $0 \leq |u_n u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}\left(u_n^2 + u_{n+1}^2\right)$ donc la série $\sum |u_n u_{n+1}|$ converge et

$|< u, s(u) >| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 + u_{n+1}^2\right) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 + \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 .= \|u\|^2$.

On en déduit que $\dfrac{|< u, s(u) >|}{\|u\|^2} \leq 1$ donc $-1 \leq \dfrac{< u, s(u) >}{\|u\|^2} \leq 1$.

Or $\dfrac{< u, D(u) >}{\|u\|^2} = \dfrac{< u, (s - id)(u) >}{\|u\|^2} = \dfrac{< u, s(u) >}{\|u\|^2} - 1$ donc $-2 \leq \dfrac{< u, D(u) >}{\|u\|^2} \leq 0$.