

Lundi 8 juin 2026 (fonctions de plusieurs variables)

Exercice 1 Déterminer les extrémums de $(x, y) \rightarrow y(x^2 + (\ln(y))^2)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 (ccinp): Soit φ une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^2 . Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ par $F(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Déterminer les fonctions φ pour lesquelles la fonction F vérifie l'équation $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0 : (\mathcal{E})$.

Exercice 3 (Ccinp) On s'intéresse aux fonctions f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} de classe C^1 vérifiant

$$(E) : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = u^2 + v \end{cases}$ et $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$.

1. Justifier que l'application $\phi : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ est une bijection de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 et déterminer ϕ^{-1} .
2. Montrer que f vérifie (E) si et seulement si $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 0$.
3. Déterminer les solutions de (E).

Exercice 4 (Navale 2018) Soit S la surface d'équation $x^2 - y^2 - z = 1$ et P le plan d'équation $x + 2y - z = 0$. Déterminer l'ensemble des points M de S tels que le plan tangent à S en M soit parallèle à P .

Exercice 5 (ccinp 2018) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^3$

1. Montrer que f admet un point critique mais n'y atteint pas d'extremum local.
2. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Justifier que D est une partie fermée de \mathbb{R}^2 .
3. Montrer qu'il existe (x_0, y_0) et (x_1, y_1) appartenant à D tel que $\forall (x, y) \in D, f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$. Donner la valeur de $f(x_0, y_0)$ et $f(x_1, y_1)$. (on pourra considérer $\varphi : t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$).

Exercice 6 (Mines Psi 2015) Soit H la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $H(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $H(0, 0) = 0$.

Montrer que la fonction H est continue sur \mathbb{R}^2 . Est-elle de classe C^1 ?

Exercice 7 (CCINP PSI 21) On cherche une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue vérifiant la condition:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt : (E)$$

1. Résoudre, suivant la valeur du réel c l'équation $y'' - cy = 0$.
2. Soit f une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^1 . Soit $F : (x, y) \mapsto \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt$. Montrer que F est de classe C^2 et préciser $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
3. Soit f une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue vérifiant (E). Déterminer $f(0)$. Justifier que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} et calculer $f''(x) f(y) - f(x) f''(y)$. En déduire les solutions de (E).

Exercice 8 (Mines télécom) Soit f la fonction définie, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par

$$f(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f .
2. Montrer que f est de classe C^1 sur D et calculer ses dérivées partielles.
3. Déterminer la valeur de f .

Exercice 9 (centrale) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x \sin(y) - y \sin(x)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$? Si oui, les calculer.
4. La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 10 Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On pose $C = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$. Montrer que f est convexe si et seulement si C est convexe.