Mardi 9 juin 2026

Exercice 1 *On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés de 1 à 3.*
On effectue des tirages indépendants avec remise d'un seul jeton à la fois. On note :
- Y le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois dans l'ensemble des tirages réalisés deux numéros différents.
- Z le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois les trois numéros.

1. *Déterminer la loi de Y.*
2. *Identifier la loi de $Y-1$.*
3. *En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.*
4. *Déterminer la loi du couple (Y,Z).*
5. *En déduire la loi de Z ainsi que $\mathbb{E}(Z)$.*

Exercice 2 *(ccinp) On pose, pour x réel et $n \in \mathbb{N}.u_n(x) = x^n \sin(\pi x)$ et $\mathcal{I}_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx$.*

1. *Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0,1]$ et préciser la somme*
2. *Montrer la convergence de $I = \int_0^1 \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}dx$*
3. *Montrer que la série $\sum I_n$.converge et montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}dx$.*

Exercice 3 *(mines télécom) Soit un espace probabilisé (Ω, T, P) et A et B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation différentielle $(E_\omega) : y'' + (A(\omega)-1)y' + B(\omega)y = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.*

Exercice 4 *On pose $u_n(x) = \dfrac{1}{(1+nx)^2}$ et $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Montrer que S est définie et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.*

Exercice 5 *(Mines ponts)*

1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est fermé.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\exp_p(A) = \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{1}{k!}A^k$. Montrer que la suite $\left(\exp_p(A)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge (on note $\exp(A)$ la limite).*
3. *Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A.*
4. *Existe-t-il un polynôme P tel que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(A) = P(A)$?*

Exercice 6 *(Mines ponts)*
Soit $E = C^\infty([0;1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $T(f) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$.

1. *Montrer que T définit un endomorphisme de E.*
2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*, x \in [0;1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.*
3. *Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(0)$.*

4. *Trouver de même, pour $x \in [0;1]$, la valeur de $\lim_{n \to +\infty} T^n(f)(x)$.*

5. *Montrer que 1 est valeur propre de T et déterminer $E_1(T)$.*

6. *Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que k peut être valeur propre de T ?*

7. *Pour $f \in E$, calculer $(T(f))'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$.*