

# mercredi 27 mai (séries intégrales)

**Exercice 1** (ccinp) 23 Pour  $n \in \mathbb{N}$ , en cas de convergence, on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt$ .

1. Montrer l'existence de  $I_n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ , on a  $I_n = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}$ .

3. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $J_n = nI_n$ .

- Trouver une relation entre  $J_n$  et  $J_{n-1}$ .
- Calculer  $J_1$ . En déduire que une expression et un équivalent de  $I_n$  pour  $n \geq 1$ .

## Solution de l'exercice:

1: Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_n(t) = \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}$ . La fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{nt}}{(e^t)^{n+1}} = e^{-t}.$$

Par comparaison,  $f_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  car  $t \mapsto e^{-t}$  l'est donc l'intégrale  $I_n$  existe

2: Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , dans  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt$ , on pose  $u : t \mapsto -\frac{(1+e^t)^{-n}}{n}$  et  $v : t \mapsto e^{(n-1)t}$  qui sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

On a  $u'(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^{n+1}}$  et  $v'(t) = (n-1)e^{(n-1)t}$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$  car  $u(t)v(t) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{e^{-t}}{n}$  d'où,

par intégration par parties on a  $I_n = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ ,

$$\text{ce qui donne bien la relation } I_n = \frac{1}{n(1+1)^n} + \frac{n-1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{(n-1)t}}{(1+e^t)^n} dt = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}.$$

3: a: Ainsi, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $J_n = nI_n = \frac{1}{2^n} + (n-1)I_{n-1}$  donc  $J_n = J_{n-1} + \frac{1}{2^n}$ .

b: On calcule  $J_1 = I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt = \left[ -\frac{1}{1+e^t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$ .

On déduit de la question précédente que si  $n \geq 2$ ,

$$J_n = J_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (J_{k+1} - J_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{donc } I_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

**Exercice 2** (Ccinp) Soit  $\alpha > 1$ . On pose  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ .

A quelle condition la série de terme général  $R_n$  est-elle convergente?

**Solution de l'exercice** (non détaillée). On montre par comparaison avec une intégrale

que  $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  et le calcul de ces deux intégrales permet de montrer

que  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$  qui permet de conclure que  $\sum R_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 2$ .

**Exercice 3** (ccinp) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = e^{\frac{1}{n}} + a \cos\left(\frac{1}{n}\right) + b \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

Pour quelles valeurs de  $(a, b)$  la série  $\sum u_n$  est-elle convergente?

**Solution de l'exercice:** On a  $u_n = e^{\frac{1}{n}} + a \cos\left(\frac{1}{n}\right) + b\left(\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right)$  donc

$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + a\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) + b\left(\ln(2) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2}\right) + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc

$u_n = \left(1 + a + b \ln(2)\right) + \left(1 + \frac{b}{2}\right) \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{a}{2} - \frac{b}{4}\right) \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

• Si  $(1 + a + b \ln(2)) \neq 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$  donc la série  $\sum u_n$  diverge.

• Si  $(1 + a + b \ln(2)) = 0$  et  $\left(1 + \frac{b}{2}\right) \neq 0$  alors  $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{b}{2}\right) \frac{1}{n}$  de signe constant donc la série  $\sum u_n$  diverge.

• Si  $(1 + a + b \ln(2)) = 0$  et  $\left(1 + \frac{b}{2}\right) = 0$  alors  $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc la série  $\sum u_n$  converge.

La série  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $b = -2$  et  $a = -1 - 2 \ln(2)$ .

**Remarque** On aurait pu se contenter d'écrire  $u_n = (1 + a + b \ln(2)) + \left(1 + \frac{b}{2}\right) \frac{1}{n} + O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , ce qui évite de calculer le coefficient de  $\frac{1}{n^2}$ .

**Exercice 4 (Ccinp)** Soit  $a > 0$ . Etudier la convergence de la série de terme général  $u_n = \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$ .

**Solution de l'exercice:**

On a  $u_n = \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+a}\right)} = e^{-n^2 \ln\left(\frac{n+a}{n}\right)} = e^{-n^2 \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)} = e^{-n^2 \left(\frac{a}{n} - \left(\frac{a}{n}\right)^2 + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$ .

$u_n = e^{-na + a^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)} = e^{-na} e^{a^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)}$  et, par composition des limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)} = e^{a^2} \neq 0$

donc  $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} e^{-na} e^{a^2} > 0$  donc, par comparaison avec la série géométrique  $\sum e^{-n\alpha}$ , la série  $\sum u_n$  converge.

**Exercice 5 (Ccinp)** Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$ .

**Solution de l'exercice :**

On a  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + 2k/n}} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$  avec  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + 2t}}$ .

D'après le cours sur les sommes de Riemann,  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 2t}} dt = [\sqrt{1 + 2t}]_0^1 = \sqrt{3} - 1$ .

**Exercice 6 (Ccinp)** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels positifs. On pose  $u_n = \frac{a_n}{(1 + a_1)(1 + a_2) \times \cdots \times (1 + a_n)}$ .

1. Calculer  $u_1 + u_2$ . Donner une forme simplifiée de  $\sum_{i=1}^n u_i$ .

2. Montrer que la série  $\sum u_n$  converge

3. Calculer sa somme pour  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

**Solution de l'exercice:** 1: On remarque que

$$\bullet \frac{a_1}{(1 + a_1)} = \frac{(1 + a_1) - 1}{(1 + a_1)} = 1 - \frac{1}{(1 + a_1)}$$

$$\bullet \frac{a_2}{(1 + a_1)(1 + a_2)} = \frac{(1 + a_2) - 1}{(1 + a_1)(1 + a_2)} = \frac{1}{(1 + a_1)} - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2)}$$

donc  $u_1 + u_2 = 1 - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2)}$ . De même, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

en remplaçant  $a_n$  par  $(1 + a_n) - 1$ , on obtient

$$u_n = \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \times \cdots \times (1 + a_{n-1})} - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \times \cdots \times (1 + a_n)}$$

On en déduit, par télescopage, que  $\sum_{i=1}^n u_i = 1 - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \times \cdots \times (1 + a_n)}$ .

2: Posons  $p_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \times \cdots \times (1 + a_n)$ .

La suite  $(p_n)$  est croissante car  $p_{n+1} = (1 + a_{n+1})p_n$  avec  $a_{n+1} \geq 1$ . On en déduit que  $(p_n)$  admet une limite.

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{p_n} = 1$  donc la série  $\sum u_n$  converge et a pour somme 1.

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = l$ , alors  $l \geq p_1 > 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{p_n} = 1 - \frac{1}{l}$  donc la série  $\sum u_n$  converge et a pour somme  $\frac{l-1}{l}$ .

3: Dans le cas où  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , on a  $\ln(p_n) = \sum_{i=1}^n \ln(1 + a_i) = \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{i}}\right)$ .

Posons  $v_i = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{i}}\right)$ . On a  $v_i \sim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$  et la SATP  $\sum \frac{1}{\sqrt{i}}$  diverge donc SATP  $\sum v_i$  diverge.

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(p_n) = +\infty$  et  $p_n = e^{\ln(p_n)}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$  donc la série  $\sum u_n$  converge et a pour somme 1.

**Exercice 7** (Mines ponts) Nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n+2} \times (-1)^n}$

**Solution de l'exercice:** Remarque: On doit prendre  $n \neq 1$ .

La série n'étant pas à termes positifs, on ne peut pas raisonner par équivalent. Le CSSA ne s'applique pas (calculer les premiers termes).

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n+2} \times (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ . Les séries  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  et  $\sum O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$  convergent (la première d'après CSSA) donc la série  $\sum u_n$  converge.

**Exercice 8** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx$ .

1. Montrer que  $u_n$  est bien défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Calculer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

3. Montrer que la série numérique  $\sum u_n$  diverge.

4. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} u_n$ .

5. Montrer que  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ .

**Solution de l'exercice:** 1: Pour  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n : x \mapsto \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}$  est continue sur  $]0, 1[$ .

On a  $f_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$  donc, par comparaison aux intégrales de Riemann,  $f_n$  est intégrable sur  $]0, 1[$  donc  $u_n$  existe.

2. Utilisons le théorème de convergence dominée :

(H<sub>1</sub>) Comme  $\forall x \in ]0, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-x)^n = 0$ , la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers la fonction nulle  $g : x \mapsto 0$  sur  $]0, 1[$ .

(H<sub>2</sub>) Les fonctions  $f_n$  et la fonction  $g$  sont continues sur  $]0, 1[$ .

(H<sub>3</sub>)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0, 1[, |f_n(x)| = \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = \varphi(x)$  et  $\varphi$  est continue et intégrable sur  $]0, 1[$  d'après Riemann.

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 g(x) dx = 0$ .

3: Si  $x \in ]0, 1[$  alors  $0 < \sqrt{x} \leq 1$  donc  $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1$  donc

pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , comme  $f_n$  est positive sur  $]0, 1[$ , on a  $u_n \geq \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[ \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \geq 0$ . Comme

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$  diverge, par comparaison,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  diverge.

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , dans  $u_{n+1} = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{x}} dx$ , on pose  $u(x) = (1-x)^{n+1}$  et  $v(x) = 2\sqrt{x}$  de sorte que  $u'(x) =$

$-(n+1)(1-x)^n$  et  $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  avec  $u$  et  $v$  de classe  $C^1$  sur  $]0; 1]$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = 0$ . Ainsi, par intégration par parties, il vient  $u_{n+1} = [2(1-x)^{n+1}\sqrt{x}]_0^1 + 2(n+1) \int_0^1 (1-x)^n \sqrt{x} dx$  donc  $u_{n+1} = 2(n+1) \int_0^1 (1-x)^n \frac{1-(1-x)}{\sqrt{x}} dx$ .

Par linéarité de l'intégrale, comme les deux intégrales convergent,  $u_{n+1} = 2(n+1) \left[ \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx - \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{x}} dx \right] = (2n+2)u_n - (2n+2)u_{n+1}$  donc  $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}u_n$ .

5. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2n}{2n+1}u_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3}u_0$  d'après la question 4 qui se simplifie en  $u_n = \frac{((2n)(2n-2)\dots 2)^2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3}u_0 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}u_0$ . Or  $u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$  donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a la relation  $u_n = \frac{2}{2n+1} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$ . D'après la formule de STIRLING ( $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$ ), on a donc  $u_n \sim \frac{2}{2n} \times \frac{2^{2n}(2\pi n)n^{2n}e^{2n}}{e^{2n}\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}}$  soit  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$  comme attendu.

(On retrouve bien la divergence de  $\sum_{n \geq 0} u_n$ ).

**Exercice 9 (Cimp):** Existence et calcul de  $\int_0^{+\infty} xe^{-[x]} dx$ . ( $[x]$  est la partie entière de  $x$ ).

**Solution de l'exercice:** • Existence: On a  $0 \leq xe^{-E(x)} \leq xe^{-(x-1)} = exe^{-x}$  et  $\frac{xe^{-x}}{x^2} = x^3e^{-x} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$  donc l'intégrale existe.

• Calcul:  $\int_0^{+\infty} xe^{-[x]} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} xe^{-[x]} dx$  donc  $\int_0^n xe^{-[x]} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} xe^{-[x]} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} xe^{-k} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} x e^{-k} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-k}}{2} ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-k}}{2} + ke^{-k}$ .  
 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-k}}{2} = \frac{1}{2(1-e^{-1})}$ . Pour calculer  $\sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-k}$ , posons  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$  pour  $x \in ]-1, 1[$ .

On peut dériver terme à terme cette série entière:  $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$  donc  $xf'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$ .

Or  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  donc  $xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$ . On en déduit que  $\sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-k} = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$  et donc  $\int_0^{+\infty} xe^{-[x]} dx = \frac{1}{2(1-e^{-1})} + \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} = \frac{(1-e^{-1}) + 2e^{-1}}{2(1-e^{-1})^2} = \frac{1+e^{-1}}{2(1-e^{-1})^2} = \frac{e(1+e)}{2(e-1)^2}$ .

**Exercice 10 (centrale):** Soit  $c_n$  le nombre de chiffres dans l'écriture de  $n$  en base 10. Montrer que la série de terme général  $\frac{c_n}{n(n+1)}$  est convergente et calculer sa somme.

**Solution de l'exercice :**

1. Commençons par encadrer  $c_n$ : Supposons  $n = a_{k-1}10^{k-1} + \dots + a_110^1 + a_0$  avec  $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$  et  $a_k \neq 0$  (c'est-à-dire  $c_n = k$ ). On a donc  $10^{k-1} \leq n \leq 9 \times 10^{k-1} + \dots + 9 \times 10^1 + 9 = 9 \times \frac{1-10^k}{1-10} = 10^k - 1 \leq 10^k$  donc  $(k-1) \ln(10) \leq \ln(n) \leq k \ln(10)$  donc  $\frac{\ln(n)}{\ln(10)} \leq k \leq 1 + \frac{\ln(n)}{\ln(10)}$  soit  $\frac{\ln(n)}{\ln(10)} \leq c_n \leq 1 + \frac{\ln(n)}{\ln(10)}$ . On a donc  $\frac{c_n}{n(n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(10)n^2} = o_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{3}{2}}\right)$  donc  $\sum \frac{c_n}{n(n+1)}$  est une série absolument convergente.

2. On remarque que les nombres dont le développement admet  $k$  chiffres sont les entiers compris entre  $10^{k-1}$

et  $10^k - 1$ , donc  $\sum_{n=1}^{10^N-1} \frac{c_n}{n(n+1)} = \sum_{k=0}^N \left( \sum_{n=10^{k-1}}^{10^k-1} \frac{c_n}{n(n+1)} \right) = \sum_{k=0}^N k \left( \sum_{n=10^{k-1}}^{10^k-1} \frac{1}{n(n+1)} \right)$  donc

$\sum_{n=1}^{10^N-1} \frac{c_n}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^N k \left( \sum_{n=10^{k-1}}^{10^k-1} \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right) = \sum_{k=1}^N k \left( \frac{1}{10^{k-1}} - \frac{1}{10^k} \right)$  donc

$\sum_{n=1}^{10^N-1} \frac{c_n}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^N k \frac{1}{10^{k-1}} - \sum_{k=1}^N k \frac{1}{10^k} = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \frac{1}{10^k} - \sum_{k=1}^N k \frac{1}{10^k}$

$$\sum_{n=1}^{10^N-1} \frac{c_n}{n(n+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{10^k} - N \frac{1}{10^N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Par ailleurs  $\sum_{n=1}^{10^N-1} \frac{c_n}{n(n+1)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n(n+1)}$  donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n(n+1)} = \frac{10}{9}$

**Exercice 11** (mines ponts) Déterminer la limite de la suite de terme général  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ .

Déterminer la limite de  $\left( \sum_{k=1}^n \sin \left( \frac{1}{n+k} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Solution de l'exercice:** 1: On a  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left( a + k \frac{b-a}{n} \right)$  avec  $a = 1$ ,  $b = 2$  et  $f(x) = \frac{1}{x}$ . La fonction  $f$  est continue donc (théorème sur les sommes de Riemann où méthode des rectangles)  $(S_n)$  converge vers  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2)$ .

2: La fonction  $f : x \mapsto \sin(x)$  est de classe  $C^3$  sur  $\mathbb{R}$  donc (Taylor-Lagrange)

$$|\sin(x) - x| = \left| f(x) - \left( f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \right) \right| \leq \frac{M_3 |x-0|^3}{3!} \text{ avec } M_3 = \sup_{\mathbb{R}} |f'''| = 1.$$

$$\text{On a } |S'_n - S_n| = \left| \sum_{k=1}^n \sin \left( \frac{1}{n+k} \right) - \frac{1}{(n+k)} \right| \leq \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^3} \text{ et } \frac{1}{(n+k)^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

donc  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^3} \leq n \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$  donc  $(S'_n)$  converge aussi vers  $\ln(2)$ .