

Vendredi 29 mai (suites et séries de fonctions)

Exercice 1 (ccp 2015)

1. Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2. Donner le développement en série entière de la fonction arctangente.

En déduire que $\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$.

3. Déterminer avec la calculatrice une valeur de n à partir de laquelle $8 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} (\sqrt{2}-1)^{2k+1}$ est une approximation de π à 10^{-10} près.

Solution de l'exercice : 1: Posons $a = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On a $1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{2a}{1 - a^2}$ donc $a^2 + 2a - 1 = 0$ donc $a = -1 \pm \sqrt{2}$.

Or $a > 0$ car $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > \tan(0) = 0$ donc $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

2: Si $|x| < 1$, alors $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ donc par intégration terme à terme du DSE,

$$\forall x \in]-1, 1[, \arctan(x) - \arctan(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

On a $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$ et $\frac{\pi}{8} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\frac{\pi}{8} = \arctan(\sqrt{2} - 1)$ et $0 < \sqrt{2} - 1 < 2 - 1 = 1$

donc $\frac{\pi}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$.

3: La série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$ est spéciale alternée: posons $u_n = (-1)^n \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$

- $(-1)^n u_n = \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1} \geq 0$ donc $\sum u_n$ est alternée
- et $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{2n+1}{2n+3} (\sqrt{2}-1)^{2n+3} < 1$ donc la suite $(|u_n|)$ est décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

donc par le CSSA,

$$\left| \pi - 8 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1} \right| \leq \left| 8 \frac{(-1)^{N+1}}{2N+3} (\sqrt{2}-1)^{2N+3} \right| = 8 \frac{(\sqrt{2}-1)^{2N+3}}{2N+3} = |u_{N+1}|.$$

La calculatrice donne $|u_{11}| \leq 10^{-10}$ donc si $N \geq 10$ alors $\left| \pi - 8 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1} \right| \leq 10^{-10}$.

Remarque Sans calculatrice: si $n \geq 10$, $u_{n+1} \leq 8 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}}{2n+3} = 10^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$. Or $2^{10} = 1024 \geq 10^3$ donc

si $n \geq 15$, alors $2n+1 \geq 30$ alors $\left| \pi - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1} \right| \leq u_{n+1} \leq 10^{-10}$.

Exercice 2 (Ccinp) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit G_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par $G_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|G'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$.

2. En déduire que $|(1 - \frac{t}{n})^n e^t - 1| \leq \frac{te^t}{n}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$ on pose $I_n(x) = \int_0^x (1 - \frac{t}{n})^n e^t dt$. Montrer que la suite de fonctions (I_n) converge simplement sur $[0, 1]$. La suite de fonctions (I_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

Solution de l'exercice:

1: On a $G'_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n e^t - (1 - \frac{t}{n})^{n-1} e^t = ((1 - \frac{t}{n}) - 1) (1 - \frac{t}{n})^{n-1} e^t = (-\frac{t}{n}) (1 - \frac{t}{n})^{n-1} e^t$. On en déduit que $|G'_n(t)| \leq \frac{te^t}{n} \leq \frac{e^t}{n}$

2: D'après l'inégalité des accroissements finis, $|G(t) - G(0)| \leq M|t|$ avec $M = \sup_{u \in [0, t]} |G'_n(u)| \leq \frac{e^t}{n}$.

On a donc $|G(t) - G(0)| = |(1 - \frac{t}{n})^n e^t - 1| \leq \frac{te^t}{n}$.

3 On a $|I_n(x) - x| = |I_n(x) - \int_0^x 1 dt| \leq \int_0^x |(1 - \frac{t}{n})^n e^t - 1| dt \leq \int_0^x \frac{te^t}{n} dt \leq \frac{e}{n} : (\mathcal{I})$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = x$ donc la suite de fonctions (I_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $I : x \mapsto x$.

D'après l'inégalité (\mathcal{I}) , on a $\|I_n - I\|_\infty \leq \frac{e}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la suite de fonctions (I_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction I .

Exercice 3 (Ccinp) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} (3n + 1)^2 x^n$.

Solution de l'exercice:

• Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence donc $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$ a même rayon de convergence que $\sum x^n$.

Si $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ alors $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont même rayon de convergence et $(3n + 1)^2 \sim_{n \rightarrow +\infty} 9n^2$ donc le rayon de convergence est $R = 1$.

On a $(3n + 1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 9n(n - 1) + 15n + 1$ donc

• Si $|x| < 1$ alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (3n + 1)^2 x^n = 9 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n - 1) x^n + 15 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

donc $f(x) = 9 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n - 1) x^n + 15 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 9x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n - 1) x^{n-2} + 15x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

donc $f(x) = 9x^2 g''(x) + 15x g'(x) + g(x)$ avec $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. (A finir).

Exercice 4 (Tpe 2017) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$.

1. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) .

2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Solution de l'exercice:

1: On a $f_n(0) = 0 \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ et si $x \neq 0$, $f_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{n^2 x^2} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle (notée f).

Pour tout fonction g définie sur I , On pose $\|g\|_\infty = \sup_{x \in I} |g(x)|$.

Si $I = [0, +\infty[$, $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty \geq f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ donc $\|f_n - f\|_\infty \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

2: Si $I = [a, +\infty[$ avec $a > 0$ alors $|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{1 + n^2 x^2} \right| \leq \frac{nx}{n^2 x^2} = \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{na}$.

On a donc $\|f_n - f\|_\infty^{[a, +\infty[} \leq \frac{1}{na} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$: la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 5 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$ et calculer sa somme.

Solution de l'exercice: Posons $u_n = \binom{n}{p} x^n$.

On a $u_n = \frac{n(n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{p!} x^n = \frac{x^p}{p!} \times n(n-1) \times \dots \times (n-p+1) x^{n-p}$.

On reconnaît la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la série géométrique $\sum x^n$.

Posons $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$.

D'une part, en dérivant p fois terme à terme la série entière $f^{(p)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \times \dots \times (n-p+1) x^{n-p}$

On montre par récurrence que $f^{(p)}(x) = p! \times (1-x)^{-p-1} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

On a donc $\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

Exercice 6 (ccinp) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1. Déterminer la limite de la suite (I_n) .

2. Soit $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$. Justifier l'existence de J

3. Montrer que $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J}{n}$.

4. Justifier que $J = \frac{\pi^2}{12}$.

Solution de l'exercice: 1: Appliquons le théorème de convergence dominée sur $[0, 1[$ à $f_n : t \mapsto \ln(1+t^n)$.

• On a, pour $t \in [0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$ donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

• Les fonctions f_n sont continues donc CPM sur $[0, 1[$.

• $|f_n(t)| \leq \ln(2) = \varphi(t)$. La fonction φ est continue sur $[0, 1]$ donc intégrable sur $[0, 1[$.

D'après le théorème de convergence dominée, (I_n) converge vers $\int_0^1 0 dt = 0$.

2: On a $\ln(1+u) \sim_{u \rightarrow 0} u$ donc $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]0, 1]$ donc l'intégrale L converge.

3: Si $n \geq 1$, le changement de variable défini par $u(x) = x^n$

(qui est bien de classe C^1 , bijectif strictement croissant de $]0, 1]$ dans $]0, 1]$),

donne $nI_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^{n-1}} n t^{n-1} dt = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u^{\frac{n-1}{n}}} du$.

Posons $g_n(u) = \frac{\ln(1+u)}{u} u^{\frac{1}{n}}$.

On a $u \in]0, 1]$ donc $u^{\frac{1}{n}} \leq u$ et $|g_n(u)| \leq \frac{\ln(1+u)}{u}$ qui est intégrable sur $]0, 1]$.

Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u^{\frac{n-1}{n}}} du = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = J \text{ donc } I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J}{n}.$$

4: Pour $u \in]0, 1[$, $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^n$ donc $\frac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^{n-1}$. Posons $v_n(u) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^{n-1}$.

- La fonction v_n est continue sur $[0, 1]$ donc intégrable sur $]0, 1[$.

- La série de fonction $\sum v_n$ converge simplement vers $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ sur $]0, 1[$

- $\int_0^1 |v_n(u)| du = \frac{1}{n^2}$ donc, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Le th d'interversion série intégrale sur un intervalle quelconque $\sum - f$ donne

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 v_n(u) du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = J.$$

$$\text{On a } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - L = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ donc } J = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 7 Mines On pose, pour θ réel et $n \in \mathbb{N}$, $u_n(\theta) = \frac{n \sin^2(n\theta)}{2^n}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

2. Pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$, justifier que la série $\sum nz^n$ converge et préciser sa somme.

3. En déduire la somme de la série $\sum u_n$.

Solution de l'exercice:

1: On a $n^2 u_n(\theta) = n^2 \frac{n \sin^2(n\theta)}{2^n}$ donc $|n^2 u_n(\theta)| \leq \frac{n^3}{2^n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $u_n(\theta) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum u_n(\theta)$ converge absolument donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

2: Première idée: posons, pour $|x| < 1$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. On a $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Ce calcul ne vaut que pour x réel.

Deuxième idée: Etendre cette relation à $z \in \mathbb{C}$.

En utilisant le produit de Cauchy de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ par elle même pour $|z| < 1$, on obtient, $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

avec $a_n = \sum_{k=0}^n 1 \times 1 = n+1$, donc $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$ donc $\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^n$.

3: On a $\frac{n \sin^2(n\theta)}{2^n} = \frac{n \frac{1 - \cos(2n\theta)}{2}}{2^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2^n} - \frac{n \cos(2n\theta)}{2^n} \right) = \frac{1}{2} (v_n + w_n)$ avec $v_n = \frac{n}{2^n}$ et $w_n = \frac{n \cos(2n\theta)}{2^n}$.

On pose $z_0 = \frac{e^{i2\theta}}{2}$, on a $\frac{\cos(2n\theta)}{2^n} = \operatorname{Re}(z_0^n)$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{Re}(z_0^n) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n (z_0)^n \right)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On pose $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^n$. On a donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right)^n = f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right)$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cos(2n\theta)}{2^n} = \operatorname{Re} \left(f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right) \right) \text{ d'où } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n \sin^2(n\theta)}{2^n} = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Re} \left(f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right) \right) \right).$$

$$\text{D'après Q2, } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \text{ et } f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right) = \frac{\frac{e^{i2\theta}}{2}}{\left(1 - \frac{e^{i2\theta}}{2}\right)^2} = \frac{2e^{i2\theta}}{4 - 4e^{i2\theta} + e^{i4\theta}} = \frac{2e^{i2\theta} (4 - 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta})}{(4 - 4e^{i2\theta} + e^{i4\theta})(4 - 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta})}$$

$$\text{donc } f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right) = \frac{8e^{i2\theta} - 8 - 2e^{-i2\theta}}{33 - 20(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 4(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta})} = \frac{8e^{i2\theta} - 8 - 2e^{-i2\theta}}{33 - 40 \cos(2\theta) + 8 \cos(4\theta)} \text{ et}$$

$$\operatorname{Re} \left(f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right) \right) = \frac{-8 + 6 \cos(2\theta)}{33 - 40 \cos(2\theta) + 8 \cos(4\theta)} \text{ d'où } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1 + \frac{4 - 3 \cos(2\theta)}{33 - 40 \cos(2\theta) + 8 \cos(4\theta)}.$$

Exercice 8 (ccinp) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = 3^n (x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.

2. Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$ et $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(t)) dt$. Que peut on en déduire?

Solution de l'exercice:

1: Si $x \in]0, 1[$, $3^n x^{2^n} = e^{n \ln(3)} e^{2^n \ln(x)} = e^{n \ln(3) + 2^n \ln(x)} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ car $n \ln(3) + 2^n \ln(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \ln(x) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Le résultat est aussi vrai pour $x = 0$ ou $x = 1$ donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

2: On a $\int_0^1 f_n(t) dt = 3^n \int_0^1 t^{2^n} - t^{2^{n+1}} dt = 3^n \left(\frac{1}{2^n + 1} - \frac{1}{2^{n+1} + 1} \right) = 3^n \left(\frac{2^{n+1} - 2^n}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)} \right)$

donc $\int_0^1 f_n(t) dt = 3^n \left(\frac{2^n}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)} \right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6^n}{2 \times 4^n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On n'a donc pas $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$.

Les fonctions f_n sont continues sur le segment $[0, 1]$ et on ne peut pas intervertir limite et intégrale. Il n'y a donc pas convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 9 (Mines ponts) Soit $a \in \mathbb{R}$, tel que $|a| < 1$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{1 - |a|}$.

3. Montrer que f est développable en série entière sur \mathbb{R} .

Solution de l'exercice: Posons $u_n(x) = \sin(a^n x)$.

1: Appliquons le théorème de dérivation terme à terme généralisé aux dérivées successives.

Les fonctions u_n sont de classe C^∞ .

On a $u_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} a^n x$ et $\sum |a^n x|$ est convergente car $|a| < 1$ donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

Soit $a > 0$. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément.

On a $u_n^{(k)}(x) = \varepsilon_k (a^n)^k v_k(x)$ avec $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ et $v_k(x) = \sin(x)$ ou $v_k(x) = \cos(x)$.

On a donc $\|u_n^{(k)}\|_\infty \leq (a^n)^k = (a^k)^n$ et $|a^k| < 1$ donc $\sum (a^k)^n$ converge donc $\sum \|u_n^{(k)}\|_\infty$ converge:

La série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur \mathbb{R} .

On en déduit que f est de classe C^∞ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x)$.

2: On a donc $|f^{(k)}(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^{(k)}(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |(a^k)|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n$ car $|a^k| \leq |a|$ donc $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{1 - |a|}$.

3 On fixe x et on applique Taylor Lagrange: $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{1}{1 - |a|} \frac{|x - 0|^{n+1}}{(n + 1)!} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$.

On en déduit que pour tout x réel, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ donc f est développable en série entière sur \mathbb{R} .

Exercice 10 (Mines ponts)

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \\ n - n^2|x| & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

2. Etudier la limite de la suite de terme général $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) g(x) dx$ ou g est une fonction continue sur \mathbb{R} .

Solution de l'exercice:

1 • La fonction f_n est paire. Elle est affine sur $[0, \frac{1}{n}]$ avec $f_n(0) = n$ et $f_n(\frac{1}{n}) = 0$. La suite $(f_n(0))$ ne converge pas et si $x \neq 0$, il existe n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < |x|$ et pour $n \geq n_0$, on a $f_n(x) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur \mathbb{R}^* vers la fonction nulle notée f .

• Pour n fixé et $x \neq 0$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}^*} |f_n(t) - f(t)|$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f(x)| = f_n(0) = n \leq \sup_{t \in \mathbb{R}^*} |f_n(t) - f(t)|$ donc la suite $(\sup_{t \in \mathbb{R}^*} |f_n(t) - f(t)|)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}^*

2: L'intégrale I_n est définie et $I_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) g(x) dx$. Montrons que la suite (I_n) converge vers $g(0)$.

On remarque que $\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx = 1$ (aire du triangle).

Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de g entraîne qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - 0| \leq \alpha$, alors $|g(x) - g(0)| \leq \varepsilon$.

Si $\frac{1}{n} \leq \alpha$ (soit $n \geq \frac{1}{\alpha}$), on aura, pour tout $x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $|g(x) - g(0)| \leq \varepsilon$ donc

$$|I_n - g(0)| = \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) g(x) dx - g(0) \right| = \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) g(x) dx - g(0) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx \right| = \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) (g(x) - g(0)) dx \right|$$

donc $|I_n - g(0)| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x) (g(x) - g(0))| dx \leq \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)| dx = \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx = \varepsilon$.

Comme ε est quelconque, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n) = g(0)$.

Par l'absurde, on a donc montré que g s'annulait une fois et une seule sur $]a; b[$.