lundi 1 juin 2026 **(Théorèmes d'interversion)**

Exercice 1 *(Ccp 2018): Soit* $F : \lambda \mapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} dx$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de* F.
2. *Soit* $a > 0$. *Montrer que* F *est de classe* C^1 *sur* $[a\,,+\infty[$. *Calculer* $F(\lambda)$.
3. *En déduire, pour* $a, b > 0$, *la valeur de* $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

Solution de l'exercice: ATTENTION: x est la variable d'intégration et λ est le paramètre.

1: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$.

• En 0, on a $\dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} = \dfrac{1 - x + o_{x\to 0}(x) - (1 - \lambda x + o_{x\to 0}(x))}{x} = \dfrac{(-1+\lambda)x + o_{x\to 0}(x)}{x} \sim_{x\to 0} -1 + \lambda$ donc $x \mapsto \dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0 donc est intégrable sur $]0, 1]$.

• En $+\infty$

- Si $\lambda = 0$, $\dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} \sim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ donc n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
- Si $\lambda < 0$, $\dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} \sim_{x\to+\infty} \dfrac{-e^{-\lambda x}}{x} \to_{x\to+\infty} +\infty$ donc n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
- Si $\lambda > 0$, alors $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{-e^{-\lambda x}}{x}$ sont intégrables sur $[1, +\infty[$ car $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

On en déduit que F est définie sur $A =]0, +\infty[$.

2: On suppose que $0 < a$ et $\lambda \geq a$. Posons $f(\lambda, x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x}$. La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à λ égale à $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) = e^{-\lambda x}$. On a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x)\right| \leq e^{-ax} = \varphi(x)$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ (la vérification des autres hypothèses sont laissées au lecteur) donc F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et $F'(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \dfrac{1}{\lambda}$.
Ce résultat étant vrai pour $a > 0$ quelconque, il s'étend à $]0, +\infty[$.
On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda > 0$, $F(\lambda) = \ln(\lambda) + C$.
Comme $F(1) = 0$, on a $C = 0$ et $F(\lambda) = \ln(\lambda)$.

Q3: Le changement de variable affine $u = ax$ donne $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u} - e^{-\frac{b}{a}u}}{u} du = F\left(\dfrac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a)$.

Exercice 2 *(Mines telecom): Donner un développement en série entière de* $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ *sur un intervalle à préciser.*

Solution de l'exercice:

La fonction définie par $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$.est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a $f'(x) = \dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$ et $1 + x + x^2 = (x - j)(x - j^2)$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\dfrac{a}{x-j} + \dfrac{b}{x-j^2} = \dfrac{(a+b)x - aj^2 - bj}{1+x+x^2}$.
Le système $\begin{cases} a + b = 2 \\ -aj^2 - bj = 1 \end{cases}$ a pour solution $(a, b) = (1, 1)$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{x-j} + \dfrac{1}{x-j^2} = \dfrac{-j^2}{1-\frac{x}{j}} + \dfrac{-j}{1-\frac{x}{j^2}}$(car $j^3 = 1$).
Si $|x| < 1$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{x-j} + \dfrac{1}{x-j^2} = \dfrac{-j^2}{1-\frac{x}{j}} + \dfrac{-j}{1-\frac{x}{j^2}} = -j^2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{j}\right)^n - j \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{j^2}\right)^n$ donc en utilisant le

fait que $j^3=1$, $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-j^{2n+2}-j^{n+1}\right)x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}-2\cos\left(\dfrac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n$ car $j^2=\bar{j}$ donc $j^{2n+2}-j^{n+1}=\overline{j^{n+1}}+j^{n+1}=2\operatorname{Re}\left(j^{n+1}\right)$.
Par intégration terme à terme sur $[0,x]$ avec $x\in\left]-1,1\right[$,
on a $f(x)=f(0)-2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\cos\left(\dfrac{2(n+1)\pi}{3}\right)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=-2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\cos\left(\dfrac{2(n+1)\pi}{3}\right)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=-2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)\dfrac{x^n}{n}$.
Autre méthode: On sait que $(1-x)\left(1+x+x^2\right)=1-x^3$ donc $\ln\left(1-x^3\right)=\ln(1-x)+f(x)$.
On a donc $f(x)=\ln\left(1-x^3\right)-\ln(1-x)$ et en utilisant le DSE de $\ln(1-x)$ sur $\left]-1,1\right[$,
on a, pour $x\in\left]-1,1\right[$, $f(x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{3n}}{n}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}3\dfrac{x^{3n}}{3n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n}x^n$ avec
$a_n=\begin{cases}1 \text{ si } n \text{ n'est pas multiple de } 3\\ -2 \text{ si } n \text{ est multiple de } 3\end{cases}$ (ce qui correspond bien au résultat précédent)

Exercice 3 *(centrale) On pose, pour x réel, $F(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{t^x}{1+t^2}dt$.*

1. *Etudier l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de F et montrer que F est continue sur $\mathcal{D}$.*
2. *Etudier la parité de F*
3. *Etudier la dérivabilité de F.*
4. *Déterminer les limites au bornes de l'ensemble de définition de F.*
5. *Montrer que $F(x)=\int_0^1\dfrac{t^x+t^{-x}}{1+t^2}dt$ et donner un équivalent simple de F aux bornes de son ensemble de définition.*

Solution de l'exercice:
1: • En 0: $\dfrac{t^x}{1+t^2}\sim_{t\to0}t^x>0$ donc $\int_0^1\dfrac{t^x}{1+t^2}dt$ converge si et seulement si $x>-1$.
• En $+\infty$: $\dfrac{t^x}{1+t^2}\sim_{t\to0}t^{x-2}>0$ donc $\int_0^1\dfrac{t^x}{1+t^2}dt$ converge si et seulement si $2-x>1$ c'est-à-dire $x<1$.
La fonction F est définie sur $\left]-1,1\right[$. Soit $a\in\left]0,1\right[$.
Appliquons le théorème de continuité:
Nous allons effectuer une domination pour $x\in[-a,a]$.
Si $t\in\left]0,1\right]$ et $x\in[-a,a]$ alors $t^x=e^{x\ln(t)}$ et $\ln(t)\leq0$ donc $t^x\leq t^{-a}$ donc $\left|\dfrac{t^x}{1+t^2}\right|\leq\dfrac{t^{-a}}{1+t^2}$.
Si $t\in\left]1,+\infty\right[$ et $x\in[-a,a]$ alors $t^x\leq t^a$ donc $\left|\dfrac{t^x}{1+t^2}\right|\leq\dfrac{t^a}{1+t^2}$.
On pose $\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{t^{-a}}{1+t^2} \text{ si } t\in\left]0,1\right]\\ =\dfrac{t^a}{1+t^2} \text{ si } t\in\left]1,+\infty\right[\end{cases}$. La fonction φ est continue par morceaux
et vérifie $\forall t\in\left]0,+\infty\right[$, $\forall x\in[-a,a]$ $\left|\dfrac{t^x}{1+t^2}\right|\leq\varphi(t)$.
De plus elle est intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$ (étude analogue à ce qui précède) donc la fonction F est continue sur $[-a,a]$ et donc sur $\left]-1,1\right[$ car a est quelconque.
2: On a $F(-x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{t^{-x}}{1+t^2}dt=\int_0^{+\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{t}\right)^x}{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}dt=-\int_{+\infty}^0\dfrac{u^x}{1+u^2}dt=F(x)$ (changement de variable $t\mapsto\frac{1}{t}$ de classe C^1 et bijection de $\left]0,+\infty\right[$ sur $\left]0,+\infty\right[$).
3: Appliquons la formule de Leibniz:
Hypothèse de domination de $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ (les autres hypothèses sont laissées au lecteur)

Posons $g(x,t)=\dfrac{t^x}{1+t^2}$. On a donc $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\dfrac{\ln(t)\times t^x}{1+t^2}$.

$\forall t\in\,]0,+\infty[,\ \forall x\in[-a,a]\ \left|\dfrac{t^x}{1+t^2}\right|\leq\psi(t)$ avec $\psi(t)=\dfrac{\ln(t)\,t^{-a}}{1+t^2}$ si $t\in\,]0,1]$ et $\psi(t)=\dfrac{\ln(t)\,t^a}{1+t^2}$ si $t\in\,]1,+\infty[$.

La fonction ψ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$:

- En 0, $\psi(t)\sim_{t\to0}\ln(t)\,t^{-a}>0$ et si $a<b<1$, $\ln(t)\,t^{-a}=o_{t\to0}\left(t^{-b}\right)$ et $t\mapsto t^{-b}$ intégrable sur $]0,1]$.
- En $+\infty$, $\psi(t)\sim_{t\to0}\ln(t)\,t^{a-2}>0$ et si $a-2<b<-1$, $\ln(t)\,t^{-a}=o_{t\to0}\left(t^{b}\right)$ et $t\mapsto t^{b}$ intégrable sur $[1,+\infty[$.

On en déduit que F est de classe C^1 sur $[-a,a]$ et donc sur $]-1,1[$ et $F'(x)=\int_0^{+\infty}\ln(t)\dfrac{t^x}{1+t^2}dt$.

4: Pour $x\in\,]-,1[$, on a $F(x)\geq\int_0^1\dfrac{t^x}{1+t^2}dt\geq\int_0^1\dfrac{t^x}{2}dt=\left[\dfrac{t^{x+1}}{2(x+1)}\right]_0^1=\dfrac{1}{2(x+1)}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-1}F(x)=+\infty$. Par parité, $\lim\limits_{x\to1}F(x)=+\infty$.

5: On montre $F(x)=\int_0^1\dfrac{t^x+t^{-x}}{1+t^2}dt$ en posant $u=\dfrac{1}{t}$ dans $\int_1^{+\infty}\dfrac{t^x}{1+t^2}dt$ (idem Q2)

On va montrer que $F(x)\sim_{x\to-1}\int_0^1 t^x dt=\dfrac{1}{x+1}$.

On a $F(x)-\dfrac{1}{x+1}=\int_0^1\dfrac{t^x+t^{-x}}{1+t^2}-t^xdt=\int_0^1\dfrac{t^{-x}+t^{x+2}}{1+t^2}dt$ et $0\leq\dfrac{t^{-x}+t^{x+2}}{1+t^2}\leq2$ donc $0\leq F(x)-\dfrac{1}{x+1}\leq2$ donc $F(x)-\dfrac{1}{x+1}=o_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ donc $F(x)\sim_{x\to-1}\dfrac{1}{x+1}$.

Exercice 4 *Ccinp: Montrer que la fonction de la variable réelle définie par* $f(x)=\dfrac{ch(x)-1}{x^2}$ *admet un prolongement de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice: Pour $x\neq0$, $\dfrac{ch(x)-1}{x^2}=\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}-1}{x^3}=\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^3}=\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{x^2}$

donc $\dfrac{ch(x)-1}{x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n+2)!}$. La fonction $x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n+2)!}$ est une somme de série entière de rayon de convergence $+\infty$ donc est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et prolonge $x\mapsto\dfrac{ch(x)-1}{x}$.

Exercice 5 *On pose, pour x réel,* $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$.

1. *Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.*
3. *Trouver un équivalent de $f'(x)$ quand x tend vers 0^+. La fonction f est-elle dérivable en 0?*
4. *Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.*
5. *Tracer la courbe représentative de* f.

Solution de l'exercice:

.1: • Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$. Alors $|f_n(x)|\leqslant\frac{\pi}{2n^2}$ donc, par comparaison et critère de RIEMANN, la série $\sum_{n\geqslant1}f_n(x)$ converge pour tout réel x. Ainsi, $\sum_{n\geqslant1}f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$: f **est définie sur** R.

• La majoration précédente montre même que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}}\leqslant\frac{\pi}{2n^2}$ (on a même égalité car $\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=\frac{\pi}{2n^2}$) et la série $\sum_{n\geqslant1}\frac{\pi}{2n^2}$ converge donc la série $\sum_{n\geqslant1}f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, par théorème, la fonction somme f **est aussi continue sur** R.

2: Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H_1) On vient de voir que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$).
(H_2) Pour tout entier $n\geqslant 1$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f_n'(x)=\frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.
(H_3) Soit $\mathrm{a}>0$, posons $\mathrm{J_a}=[\mathrm{a};+\infty[$, on a $\forall x\in J_{\mathrm{a}}, \forall \mathrm{n}\geqslant 1, \left|f_{n\mathrm{n}}'(\mathrm{x})\right|\leqslant f_n'(\mathrm{a})$ donc $\|f_n'\|_{\infty,J_a}=f_n'(a)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n^3a^2}$ donc, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 1}\|f_n'\|_{\infty,J_a}$ converge ce qui justifie que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur J_a et $a>0$ est quelconque.

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\neq 0, f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

On fait de même sur $]-\infty,\mathrm{a}]$
3: • On effectue une comparaison série-intégrale.
Si $x>0$ est fixé, la fonction $g_x: t\mapsto\frac{1}{t(1+t^2x^2)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $n\geqslant 2$, on a $\int_n^{n+1} g_x(t)dt\leqslant g_x(n)=f_n'(x)\leqslant\int_{n-1}^n g_x(t)dt$.
On somme pour n allant de 1 à p pour l'inégalité de gauche et pour n allant de 2 à p pour celle de droite et on obtient par CHASLES $\int_1^{p+1} g_x(t)dt\leqslant\sum\limits_{n=1}^{p} f_n'(x)\leqslant f_1'(x)+\int_1^p g_x(t)dt$ et comme les intégrales et séries considérées convergent,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} g_x(t)dt\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\leqslant f_1'(x)+\int_1^{+\infty} g_x(t)dt}$$

• Calcul de $\int_1^{+\infty} g_x(t)dt$: On a, $\dfrac{1}{t\left(1+t^2x^2\right)}\dfrac{\left(1+t^2x^2\right)-t^2x^2}{t\left(1+t^2x^2\right)}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{tx^2}{1+t^2x^2}$

On a donc $\int_1^{+\infty} g_x(t)dt=\int_1^y\left(\frac{1}{t}-\frac{x^2t}{2(1+x^2t^2)}\right)dt=\left[\ln(t)-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2t^2\right)\right]_1^{+\infty}=\left[\ln(\dfrac{t}{\sqrt{1+x^2t^2}})\right]_1^{+\infty}$.

Or $\dfrac{t}{\sqrt{1+x^2t^2}}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{\sqrt{1+x^2t^2}}=\dfrac{1}{x}$ donc

$$\boxed{\int_1^{+\infty} g_x(t)dt=\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)=-\ln(x)+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)}$$

• Conclusion: On a donc $\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\ln(x)\leqslant f'(x)\leqslant\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\ln(x)$.
Par encadrement, on en déduit l'équivalent $f'(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}-\ln(x)$.
• Conclusion géométrique:
- $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$ d'après ce qui précède
- f est continue en 0
donc (th limite de la dérivée), le graphe de f admet en 0^+une tangente verticale et f n'est pas dérivable en 0.
4 L'idée de cette question est de montrer, en s'inspirant de la question précédente que $f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\int_0^x(-\ln(t))dt$.
Pour $x>0$, comme $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$ pour $a>0$ par le théorème fondamental de l'intégration, en faisant tendre a vers 0 , par continuité de f en 0 , on a $f(x)=\int_0^x f'(t)dt$.
Comme $f'(t)\underset{0}{\sim}-\ln((t)$, on a $\mathrm{f}'(\mathrm{t})+\ln(\mathrm{t})\underset{0}{=}\mathrm{o}(\ln(\mathrm{t}))$.
Pour $\varepsilon>0$, il existe donc $\alpha>0$ tel que $\forall x\in]0;\alpha[, |\mathrm{f}'(\mathrm{t})+\ln(\mathrm{t})|\leqslant\varepsilon|\ln(\mathrm{t})|$.
Ainsi, $\left|\int_0^x\left(f'(t)+\ln(t)\right)dt\right|\leqslant\varepsilon\int_0^x(-\ln(t))dt$. Il vient donc $|f(x)+x\ln(x)-x|\leqslant\varepsilon|x\ln(x)-x|$, ce qui garantit que $f(x)+x\ln(x)-x=0(x\ln(x)-x)$, ou encore que $f(x)\underset{0}{\sim}-x\ln(x)+x$.
Mais comme $-x\ln(x)+x\underset{0}{\sim}-x\ln(x)$, on a enfin l'équivalent $f(x)\underset{0}{\sim}-x\ln(x)$.
5: a: Comme toutes les f_n sont croissantes comme la fonction Arctan, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. On pouvait aussi utiliser la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et l'expression de sa dérivée positive vue précédemment.
b. en $+\infty$: Appliquons le th de la double limite:
(H_1): les fonctions f_n admettent des limites finies en $\pm\infty$.
(H_2): La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2n^2}=\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi^2}{6}$.

Comme f est impaire car toutes les fonctions f_n le sont, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$.
Conclusion: La fonction f est impaire, croissante et on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^3}{12} \sim 2,58$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$.
(Son graphe ressemble donc à celui de la fonction Arctan, avec deux asymptotes horizontales d'équation $y = \pm\frac{\pi^3}{12}$, mais avec une tangente verticale en 0.)

Exercice 6 *(Mines ponts) Soit E un ensemble non vide.*
Une partition de E est un ensemble $\mathcal{P}$ non vide de parties de E telle que si j est le cardinal de $\mathcal{P}$ et que $\mathcal{P} = \{A_1, A_{2,}, \ldots, A_j\}$ alors $\mathcal{P}$ vérifie les trois conditions:
- pour tout $i \in [[1,j]]$, A_i est non vide
- pour tout $(i,i') \in [[1,j]]^2$ tel que $i \neq i'$, on a $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$.
- $E = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_j$
On pose $T_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n le nombre de partitions d'un ensemble de $[[1,n]]$.

1. *Déterminer T_1, T_2 et T_3.*

2. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$.*

3. *Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $\forall x \in]-R,R[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{T_n}{n!} x^n = e^{e^x-1}$.*

4. *En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \frac{1}{e} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k^n}{k!}$.*

Solution de l'exercice:
1: Partitions de $[[1,3]]$:
Comme $\mathcal{P} = \{A_1, A_{2,}, \ldots, A_j\}$ est un ensemble, une permutation des A_i ne change pas $\mathcal{P}$.
• Si $j = 1$, $\mathcal{P} = \{\{1,2,3\}\}$ est l'unique possibilité.
• Si $j = 2$, on a 3 possibilités: $\mathcal{P} = \{\{1\},\{2,3\}\}$ ou $\mathcal{P} = \{\{2\},\{1,3\}\}$ ou $\mathcal{P} = \{\{3\},\{1,2\}\}$.
• Si$j = 3$, $\mathcal{P} = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ est l'unique possibilité.
On a donc $T_3 = 5$.
(On vérifie de même que $T_1 = 1$ et $T_2 = 2$).
2: On admet que le nombre de partitions d'un ensemble fini E ne dépend que du cardinal de E.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des partitions de $[[1,n+1]]$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{E}$.
Soit A la partie $[[1,n+1]]$ appartenant à contenant $n+1$. On a donc $\mathcal{P} = \{A\} \cup \mathcal{P}'$ où $\mathcal{P}'$ est une partition de $[[1,n+1]] \setminus A$.
- Soit $k \in [[0,n]]$ fixé. Si $card(A) = k+1$, $0 \leq k \leq n$, alors $card([[1,n+1]] \setminus A) = n-k$ donc il existe T_{n-k} différentes valeurs de $\mathcal{P}'$. La valeur de k étant fixé, il existe $\binom{n}{k}$ valeurs de A: en effet, la partie A, de cardinal $k+1$ et contenant $n+1$, est déterminée par $A \cap [[1,n]]$, partie quelconque de $[[1,n]]$ de cardinal k. Il y a donc $\binom{n}{k} T_{n-k}$ partitions p avec $card(A) = k$.
- Comme k peut varier de 0 à n, on en déduit (une union disjointe)
que $T_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} T_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$ car $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
3: a Soit R le rayon de convergence de $\sum \dfrac{T_n}{n!} x^n$. Montrons que $\dfrac{T_n}{n!} \leq 1$.
Cette relation est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie pour $k \in [[0,n]]$, montrons la pour $n+1$:.

$$\frac{T_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)(n-k)!} \frac{T_k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)(n-k)!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)} = 1 \text{ d'où le résultat.}$$

La série entière $\sum 1x^n$ est de rayon 1 et $\left|\dfrac{T_n}{n!}\right| \leq 1$ donc la série entière $\sum \dfrac{T_n}{n!} x^n$ est de rayon $R \geq 1$.
b: Posons $a_n = \dfrac{T_n}{n!}$. On a d'après le calcul précédent $(n+1)a_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(n-k)!} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = c_n$ avec

$b_n = \dfrac{1}{n!}$.
La série $\sum b_n x^n$ est de rayon $R' = +\infty$.

Pour $|x| < \min(R, R') = R$, la série $\sum c_n x^n$ converge absolument et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = e^x f(x)$.

Par ailleurs si $|x| < 1$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = f'(x)$ donc $f'(x) = e^x f(x)$.

On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in](R, R[$, $f(x) = \lambda e^{e^x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $f(0) = 1$, donc $\lambda = \dfrac{1}{e}$ donc $f(x) = \dfrac{1}{e} e^{e^x} = e^{e^x - 1}$.

4: D'après les propriétés des séries entières, f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{T_n}{n!} = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ donc $f^{(n)}(0) = T_n$.
On a $f(x) = \dfrac{1}{e} e^{e^x} = \dfrac{1}{e} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(e^x)^k}{k!}$. Posons $u_k(x) = \dfrac{e^{kx}}{k!}$.

- Pout tout $k \in \mathbb{N}$, u_k est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$. et $u_k^{(n)}(x) = \dfrac{k^n e^{kx}}{k!}$.

- On a donc $\left\| u_k^{(n)} \right\|_\infty^{]-1,1[} \leq \dfrac{k^n e^k}{k!}$.Or $k^n = \underset{k \to +\infty}{o} \left(e^k\right)$ donc .$\dfrac{k^n e^k}{k!} = o_{k \to +\infty} \left(\dfrac{e^{2k}}{k!} \right)$ et $\sum \dfrac{e^{2k}}{k!}$ SATP qui converge (série exponentielle en e^2)
donc la série de fonctions $\sum u_k^{(n)}$ converge normalement donc uniformément sur $]-1, 1[$ donc f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et $f^{(n)}(x) = \frac{1}{e} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k^{(n)}(x) = \frac{1}{e} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k^n e^{kx}}{k!}$ donc $T_n = f^{(n)}(0) = \frac{1}{e} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k^n}{k!}$.
Autre méthode: Montrer le résultat par récurrence sur n en utilisant Q2.