

mercredi 3 juin 2026 (équa diffs)

Exercice 1 (ccinp) Soit les équations $(E_0) : x^2 y'' - 2y = 0$ et $(E) : x^2 y'' - 2y = x^3$.

1. Trouver une solution polynomiale u de (E_0) .
2. Trouver une fonction v solution de (E_0) , indépendante de u , écrite sous la forme $v(x) = u(x)z(x)$ avec z de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* .
3. Dédurre de la question précédente les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* .
4. Trouver toutes les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

Solution de l'exercice:

1: On remarque que $y : x \mapsto x^2$ est une solution polynomiale de (E_0) .

Si on ne fait pas cette remarque, on suppose que $y : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ de (E_0) avec $a_n \neq 0$ est solution.

• En identifiant les termes en x^n dans (E_0) , on a $n(n-1)a_n - 2a_n = 0$ donc, comme $a_n \neq 0$, il vient $n(n-1) - 2 = n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1) = 0$ donc $n = 2$ car $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, s'il existe une solution polynomiale de (E_0) , elle est forcément de degré 2.

• On pose $y(x) = ax^2 + bx + c$.

On a y solution de $(E_0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ax^2 - 2(ax^2 + bx + c) = -2bx - c = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$.

Les fonctions $x \mapsto ax^2$ sont donc solutions de (E_0) .

2: Soit v de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* et $z : x \mapsto \frac{v(x)}{x^2}$. la fonction z est aussi de classe C^2 et $v(x) = x^2 z(x)$.

On a donc $v'(x) = 2xz(x) + x^2 z'(x)$ et $v''(x) = 2z(x) + 4xz'(x) + x^2 z''(x)$.

Ainsi, v est solution de (E_0) sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $\forall x \in I, 2x^2 z(x) + 4x^3 z'(x) + x^4 z''(x) - 2x^2 z(x) = 0$

c'est-à-dire si et seulement si z vérifie $(F) : xz''(x) + 4z'(x) = 0$,

ce qui équivaut au fait que $\boxed{z' \text{ vérifie } (G) : xw' + 4w = 0}$

Or z' vérifie (G) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, z'(x) = \frac{\lambda}{x^4}$ donc

les solutions de (F) sont donc les fonctions $z : x \mapsto \frac{\alpha}{x^3} + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on trouve donc $z(x) = \frac{1}{x^3}$ donc $v : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une solution de (E_0) sur \mathbb{R}_+^* .

Les fonctions u et v ne sont pas proportionnelles donc (u, v) est une famille libre.

On peut faire de même sur \mathbb{R}_-^*

3: • l'équation (E_0) est linéaire, homogène et normalisée, l'ensemble de ses solutions sur \mathbb{R}_+^* est un espace vectoriel de dimension 2, il est donc engendré par u et v d'après les deux questions précédentes. Les solutions de (E_0) sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* sont donc les fonctions $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^2$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

• On constate comme en a. que $y_p : x \mapsto \frac{x^3}{4}$ est solution de (E) sur \mathbb{R} .

Les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* sont les fonctions $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On peut faire de même sur \mathbb{R}_-^*

4: - Analyse : soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) sur \mathbb{R} , ainsi y est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

Les restrictions de y à \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* sont les solutions vues en **Q3**. donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x < 0, y(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \beta_1 x^2 + \frac{x^3}{4} \text{ et } \forall x > 0, y(x) = \frac{\alpha_2}{x} + \beta_2 x^2 + \frac{x^3}{4}.$$

• Continuité en 0: En prenant $x = 0$ dans (E) , on a $y(0) = 0$.

La continuité de y en 0 implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et donc

$$\forall x \leq 0, y(x) = \beta_1 x^2 + \frac{x^3}{4} \text{ et } \forall x \geq 0, y(x) = \frac{\alpha_2}{x} + \beta_2 x^2 + \frac{x^3}{4}.$$

• Dérivabilité en 0: On a $y'_d(0) = 2\beta_2 \times 0 = 0 = y'_g(0)$ donc y est dérivable en 0 et $\forall x \leq 0, y'(x) = 2\beta_1 x + \frac{3x^2}{4}$ et

$$\forall x \geq 0, y'(x) = 2\beta_2 x + \frac{3x^2}{4}.$$

• Dérivée seconde en 0: On a alors $y_d''(0) = 2\beta_2$ et $y_d''(0) = 2\beta_1$ donc $\beta_1 = \beta_2$.

- Synthèse : Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$, alors y est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* et y vérifie aussi (E) en $x = 0$ (tous les termes s'annulent en 0).

Conclusion : les solutions réelles sur \mathbb{R} de (E) sont les $y : x \mapsto \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (ccinp)

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$: (E).

2. Existe-t-il des solutions sur $] -\infty, 0[$ non développables en série entière?

Solution de l'exercice: 1: Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$.

On pose, pour $x \in]-R, R[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$$\begin{aligned} y \text{ vérifie (E)} &\Leftrightarrow 4x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (4n(n-1) - 2n) a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 9a_n x^{n+2} = 0 \\ - &\Leftrightarrow 2a_1 + 4a_2 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((2(n+1)(2n-1)) a_{n+1} + 9a_{n-2}) x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = 0 \\ \text{et } \forall n \geq 2, ((2(n+1)(2n-1)) a_{n+1} + 9a_{n-2}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = 0 \\ \text{et } \forall n \geq 0, a_{n+3} = \frac{-9a_n}{2(n+3)(2n+3)} \end{cases} : (C) \end{aligned}$$

On vérifie par récurrence que (C) entraîne que $\forall k \in \mathbb{N}, a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0$: (C₁)

et $a_{3k} = -\frac{9}{(6k-3) \times (6k)} a_{3(k-1)} = -\frac{1}{2k \times (2k-1)} a_{3(k-1)}$ et finalement $\forall k \in \mathbb{N}, a_{3k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0$: (C₂).

On a donc $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{3k}$.

Il est clair que (C₁) et (C₂) entraîne (C) donc entraîne que y vérifie (E). On a donc raisonné par équivalence.

• Si $x \geq 0$, alors $y(x) = a_0 \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{2k} = a_0 \times \cos\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$ et

• Si $x < 0$, $(x\sqrt{-x})^{2k} = (x)^{2k} (-x)^k = (-1)^k x^{3k}$ donc $y(x) = a_0 \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x\sqrt{-x})^{2k}}{(2k)!} = a_0 \times \text{ch}(x\sqrt{-x})$

(il est inutile de déterminer le rayon de convergence car on retombe sur des séries entières connues).

2: Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, (E) $\Leftrightarrow y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{9}{4}xy = 0$ qui est homogène normalisée donc l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Les solutions développables en série entières sont les fonctions colinéaires à $x \mapsto \cos\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$ qui forment un espace vectoriel de dimension 1.

Conclusion: Il existe d'autres solutions.

Exercice 3 (ccinp) On se propose de déterminer des fonctions $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant:

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}^*, f' \left(-\frac{1}{x} \right) = f(x).$$

1. On suppose que f vérifie (E) . Déterminer une équation différentielle du second ordre (E') vérifiée par f .
2. Quelles sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^a$ solutions de (E') sur $]0, +\infty[$.
Résoudre (E') sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$
3. Conclure.

Solution de l'exercice:

1: On a $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(-\frac{1}{x}) = f(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = f(-\frac{1}{x})$ donc f' est dérivable comme composée de fonctions dérivable.

En dérivant l'égalité, $f''(x) = \frac{1}{x^2} f'(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f'(x)$ donc f vérifie $(E') : y'' - \frac{1}{x^2} y = 0$.

2. Remarque: Si α et β sont deux réels distincts, les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^\beta$ ne sont pas colinéaires car le quotient $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$ n'est pas constant sur $]0, +\infty[$.

Sur $]0, +\infty[$:

En prenant $u : x \mapsto x^a$, on trouve que u vérifie (E') si et seulement si $(a(a-1) - 1)x^{a-2} = 0$ soit $(a(a-1) - 1) = 0$ soit $a^2 - a - 1 = 0$.

On trouve $a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = r_1$ et $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = r_2$.

On en déduit que $f_i : x \mapsto x^{r_i}$ est solution de (E') pour $i \in \{1, 2\}$.

Or (f_1, f_2) est libre (remarque) et l'équation est homogène et normalisée sur $]0, +\infty[$ donc l'ensemble des solutions de (E') est un espace vectoriel de dimension 2 qui est donc égal à $\text{vect}(f_1, f_2)$.

Sur $]-\infty, 0[$:

En prenant $u : x \mapsto (-x)^a$, on trouve de même que u vérifie (E') si et seulement si $a = r_1$ ou $a = r_2$.

On en déduit que $g_i : x \mapsto (-x)^{r_i}$ est solution de (E') pour $i \in \{1, 2\}$.

De même; l'ensemble des solutions de (E') est égal à $\text{vect}(g_1, g_2)$.

3 Si f vérifie (E) alors f vérifie (E') sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ donc

donc $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x > 0, f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$

et $\exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x > 0, f(x) = \mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x)$.

Si $x > 0$, alors $f'(x) = \lambda_1 r_1 x^{r_1-1} + \lambda_2 r_2 x^{r_2-1} = \lambda_1 r_1 x^{-r_2} + \lambda_2 r_2 x^{-r_1}$ car $r_1 + r_2 = 1$ et $f(-\frac{1}{x}) = \mu_1 x^{-r_1} + \mu_2 x^{-r_2}$.

En utilisant la liberté de $(x \mapsto x^{-r_1}, x \mapsto x^{-r_2}), \forall x > 0, f'(x) = f(-\frac{1}{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 r_1 = \mu_2 \\ \lambda_2 r_2 = \mu_1 \end{cases}$.

On trouve la même condition pour $x < 0$.

CONCLUSION: f est solution de (E) si et seulement si

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \forall x > 0, f(x) = \lambda_1 x^{r_1} + \lambda_2 x^{r_2} \\ \forall x < 0, f(x) = \lambda_2 r_2 \times (-x)^{r_1} + \lambda_1 r_1 \times (-x)^{r_2} \end{cases}$$

Exercice 4 (ccinp 2018) On considère l'équation différentielle $t(t^2 - 1)x'(t) + 2x(t) = t^2 : (\mathcal{E})$

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{t(t^2 - 1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$.

2. Résoudre (\mathcal{E}) sur $]1, +\infty[$.

3. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $t \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(t)}{t-1} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$
et g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $t \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+h)}{h} & \text{si } h \neq 0 \\ 1 & \text{si } h = 0 \end{cases}$.

Montrer que les fonctions f et g sont de classe C_3^∞

4. Résoudre (\mathcal{E}) sur $]0, +\infty[$.

5. Résoudre (\mathcal{E}) sur \mathbb{R} .

Solution de l'exercice: 1: On a $\frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1} = \frac{(a+b+c)t^2 + (b-c)t - a}{t(t^2-1)}$.

Le triplet $(a, b, c) = (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ convient.

2: Sur $]1, +\infty[$, $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow x'(t) + \frac{2}{t(t^2-1)}x(t) = \frac{t^2}{t(t^2-1)}$.

Une primitive de $t \mapsto \frac{2}{t(t^2-1)}$ est $t \mapsto -2 \ln(t) + \ln(t-1) + \ln(t+1)$ donc l'équation homogène

a pour solution $t \mapsto \lambda e^{2 \ln(t) - \ln(t-1) - \ln(t+1)} = \lambda \frac{t^2}{t^2-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

En posant $y(t) = z(t) \frac{t^2}{t^2-1}$, y vérifie $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow z'(t) \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2}{t(t^2-1)} \Leftrightarrow z' = \frac{1}{t}$.

On en déduit que les solutions de (\mathcal{E}) sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto \frac{(\ln(t) + \lambda)t^2}{(t^2-1)}$.

3: $g(h) = \frac{\ln(1+h)}{h} = -\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} h^n}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} h^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} h^n$ donc g est développable en série entière sur $] -1, 1[$ donc est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.

On a $f(t) = g(t-1)$ donc f est aussi de classe C^∞ .

4: En procédant de même, les solutions de (\mathcal{E}) sur $]0, 1[$ sont les fonctions $t \mapsto \frac{(\ln(t) + \mu)t^2}{(t^2-1)}$.

D'après Q3, la fonction $t \mapsto \frac{t^2 \ln(t)}{(t^2-1)} = \frac{\ln(t)}{t-1} \times \frac{t^2}{t+1}$ admet une limite réelle en $t = 1$ donc le recollement par continuité en 1 donne $\lambda = \mu = 1$.

On a donc $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2 \ln(t)}{(t^2-1)} & \text{si } t \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 1 \end{cases}$ et cette fonction est C^∞ donc de classe C^1 d'après Q3.

5: Soit $x :]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$. Posons $z(t) = x(-t)$.

La fonction x vérifie (\mathcal{E}) sur $] -\infty, 0[$ si et seulement si

$\forall t \in]-\infty, 0[$ $t(t^2-1)x'(t) + 2x(t) = t^2$ soit $\forall t \in]0, +\infty[$ $(-t)((-t)^2-1)x'(-t) + 2x(-t) = (-t)^2$ c'est-à-dire $\forall t \in]0, +\infty[$, $t(t^2-1)z'(t) + 2z(t) = t^2$. On en déduit grâce à Q4

que $z(t) = \begin{cases} \frac{t^2 \ln(t)}{(t^2-1)} & \text{si } t \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 1 \end{cases}$ donc $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2 \ln(-t)}{(t^2-1)} & \text{si } t \neq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 1 \end{cases}$.

Il reste à étudier le recollement en 0.

On a bien $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln(t) = 0$ et on peut donc poser $x(0) = 0$.

En posant $u(t) = t^2 \ln(t)$, on a $u'(t) = 2t \ln(t) + t$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} u'(t) = 0$

Le théorème limite de la dérivée entraîne que x est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

On montre de même que x est de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$ (la fonction x est paire)

Exercice 5 (ccp) On considère l'équation différentielle $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 1 : (\mathcal{E})$.

1. Trouver une solution particulière de (\mathcal{E}) sur $]0, +\infty[$.

2. Avec le changement de variable $x = e^t$, résoudre l'équation (\mathcal{E}) sur $]0, +\infty[$.

Solution de l'exercice:

1: On remarque que $x \mapsto \frac{1}{2}$ est solution de (\mathcal{E}) sur $]0, +\infty[$.

2: Soit z la fonction définie par $z(t) = y(e^t)$. On a $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z''(t) = e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t)$ donc $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = (e^t)^2 y''(e^t) + 4e^t y'(e^t) + 2y(e^t)$ donc

y vérifie $(\mathcal{E}) : x^2 y'' + 4xy' + 2y = 1$ sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z vérifie $(\mathcal{E}') : z'' + 3z' + 2z = 1$ sur \mathbb{R}

L'équation caractéristique de (\mathcal{E}') admet deux racines réelles -1 et -2

donc (\mathcal{E}') a pour solutions $z : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{-2t}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Or $\forall x \in]0, +\infty[$, $y(x) = z(\ln(x))$ donc y vérifie (\mathcal{H}) si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x > 0$,

$$y(x) = \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x^2} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \cos(\alpha \times \arcsin(x))$.

1. Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par la fonction f sur un intervalle à préciser.

2. En déduire un développement en série entière de f .

3. Pour quelles valeurs de α la fonction f est-elle polynômiale?

Solution de l'exercice: 1: On a, pour $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = -\alpha \frac{\sin(\alpha \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$

et $f''(x) = -\alpha^2 \frac{\cos(\alpha \arcsin x)}{1-x^2} - x\alpha \frac{\sin(\alpha \arcsin x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ donc la fonction f est solution de $(\mathcal{E}) : (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$.

2: La fonction f est solution de (\mathcal{E}) et vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

D'après le théorème de Cauchy, f est l'unique solution de (\mathcal{E}) sur $] -1, 1[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Cherchons des fonctions développables en séries entières sur $] -R, R[$ avec $R > 0$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ solutions de (\mathcal{E}) et vérifiant $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

$$\text{Posons } h(x) = (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = (1-x^2) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\text{d'où } h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha^2 - n^2)a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} - (\alpha^2 - n^2)a_n \right) x^n.$$

La fonction y est solution de (\mathcal{E}) si et seulement si $h = 0$ soit, par unicité du DSE,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)(n+2)a_{n+2} - (\alpha^2 - n^2)a_n = 0 \text{ soit } a_{n+2} = \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+2)(n+1)} a_n : (\mathcal{C})$$

Les conditions (\mathcal{C}) sont équivalentes à $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (k^2 - \alpha^2)}{(2p)!}$.

Vérifions que y est bien définie: on a $\left| \frac{a_{n+2} x^{n+2}}{a_n x^n} \right| = \left| \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+2)(n+1)} x^2 \right| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} |x^2|$

donc la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$ donc $R = 1$.

On en déduit que y et f vérifient la même équation sur $] -1, 1[$ avec les mêmes conditions de Cauchy donc $y = f$.

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} \text{ avec } a_{2p} = \frac{\prod_{k=1}^{p-1} ((2k)^2 - \alpha^2)}{(2p)!}.$$

3: Les relations (\mathcal{C}) entraîne que $a_{2p} = 0 \implies a_{2p+2} = 0$ donc $a_{2p_0} = 0 \implies \forall p \geq p_0, a_{2p} = 0$.

On en déduit que la fonction f est polynômiale si et seulement si $\exists p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(2p_0)^2 - \alpha^2 = 0$

c'est-à-dire α est un entier pair.

Exercice 7 (ccinp) Soit la suite réelle (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1, a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

3. En déduire une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par la somme S de cette série entière et calculer $S(x)$.

Solution de l'exercice:

1: Initialisation: On a $1 \leq a_n \leq n^2$ pour $n = 1$ et $n = 2$.

Hérédité: (récurrence double) Soit $n \geq 1$ vérifiant $1 \leq a_{n-1} \leq (n-1)^2$ et $1 \leq a_n \leq n^2$.

On a alors $1 \leq a_n \leq a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \leq n^2 + \frac{2(n-1)^2}{n+1} \leq n^2 + 2(n-1) \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

donc $\forall n, 1 \leq a_n \leq n^2$.

2: On sait que si $0 \leq b_n \leq c_n$, le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum c_n x^n$. De plus $\sum x^n$ et $\sum n^2 x^n$ ont même rayon de convergence égal à 1 (la multiplication par n ne change pas le rayon de convergence) donc le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est 1.

3: • Equa diff vérifiée par f :

Pour $n \geq 0$, $(n+2)a_{n+2} = (n+2)a_{n+1} + 2a_n$.

Si $|x| < 1$, les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ convergent et $(n+2)a_{n+2}x^{n+1} = (n+2)a_{n+1}x^{n+1} + 2a_n x^{n+1}$

On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)a_{n+2}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)a_{n+1}x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$.

On peut dériver terme à terme sur $] -1, 1[$ et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)a_{n+2}x^{n+1} = S'(x) - a_1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n+1} = xS'(x)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = S(x) - a_0$ donc,

pour $x \in] -1, 1[$ et $S'(x) - a_1 - (xS'(x) + (S(x) - a_0)) - 2xS(x) = 0$ soit $(1-x)S'(x) - (2x+1)S(x) = 0 : (E)$.

• Résolution de (E) : Posons $a(x) = \frac{-2x-1}{1-x} = \frac{-2x+2}{1-x} - \frac{3}{1-x} = -2 - \frac{3}{1-x}$ qui admet comme primitive $A(x) = -2x - 3 \ln(1-x)$.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in] -1, 1[$, $S(x) = \lambda e^{-2x} e^{-3 \ln(1-x)} = \lambda \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$.

Comme $S(0) = a_0 = 1$, $S(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$.

Commentaire: On pourrait tirer une expression de a_n en développant l'expression obtenue (avec un produit de Cauchy).

Exercice 8 (Mines ponts) Soit $a \in]0; 1[$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Dans les questions 1, 2, et 3, on suppose que f dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

2. Exprimer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de f .

3. En déduire que f est développable en série entière sur \mathbb{R} .

4. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.

Solution de l'exercice: 1: La fonction f est dérivable donc continue sur \mathbb{R}

donc $x \mapsto f(ax) = f'(x)$ est continue sur \mathbb{R} . donc f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que f est de classe C^n sur \mathbb{R} .

Alors $x \mapsto f(ax) = f'(x)$ est aussi de classe C^n sur \mathbb{R} donc f est de classe C^{n+1} sur \mathbb{R} .

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur \mathbb{R} donc f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

2: Pour $x \in \mathbb{R}$, on $f'(x) = f(ax)$ donc $f''(x) = a f'(ax) = a f(a^2 x)$.

On continue: $f'''(x) = a \times a^2 f'(a^2 x) = a^{1+2} f(a^3 x)$ et $f^{(4)}(x) = a^{1+2} a^3 f'(a^3 x) = a^{1+2+3} f(a^4 x)$.

Supposons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, qu'on ait $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} f(a^n x)$.

En dérivant cette relation, on a $f^{(n+1)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} \times a^n f'(a^n x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^{n+1} x)$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} f(a^n x)$

et comme on a $f^{(0)}(x) = f(x) = a^{\frac{0(0-1)}{2}} f(a^0 x)$, la relation précédente est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

3: Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction, f étant continue sur le segment $[0, x]$ (ou $[x, 0]$) elle y est bornée.

On pose $M = \|f\|_{\infty}^{[0;x]}$ et $M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{[0;x]}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \right| \leq \frac{M_{n+1}|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$ (Taylor Lagrange)

Or $f^{(n+1)}(t) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^{n+1}t)$ et $a^n t \in [-b; b]$ si $t \in [0, x]$ car $|a| < 1$, on a $|f^{(n+1)}(t)| \leq a^{\frac{n(n+1)}{2}} M$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = 0$ (car $\frac{x^n}{n!}$ est le terme général de la série exponentielle) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} = 0$ car $|a| < 1$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \right| = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$ **donc f est développable en série entière.**

On peut préciser ce développement car. $f^{(k)}(0) = a^{\frac{k(k-1)}{2}} f(0)$, donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!}}$$

4 D'après la question précédente si une fonction f vérifie les conditions, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) =$

$$\lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!}. \text{ (Q1,2 et 3 forment une analyse)}$$

Réciproquement, Si on pose $a_k = \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k!} > 0$, on a $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a^k}{k+1}$ donc, comme $0 < a < 1$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 0$

Par la règle de D'Alembert, le rayon de convergence de $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ est $R = +\infty$.

La fonction $x \mapsto \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!} = f(x)$ est donc définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R} . et par dérivation terme à terme,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} (ax)^k}{k!} = f(ax).$$

Les solutions sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque.

(L'ensemble des solutions est donc une droite vectorielle).