

# mardi 2 juin 2026 (evn et équa diffs)

**Exercice 1** (Ccinp) Résoudre l'équation différentielle  $(\mathcal{E}) : xy' + y = \frac{1}{1-x}$  sur l'intervalle  $] -\infty, 1[$ .

**Solution de l'exercice:**

1a: Sur  $]0, 1[$ ,  $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{1-x}$ .

Equation homogène:  $y' + \frac{1}{x}y = 0$  de solutions  $x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$ . Idem sur  $] -\infty, 0[$ .

Variation de la constante:  $y(x) = z(x)y_0(x)$  avec  $y_0(x) = \frac{1}{x}$ .

Après calcul,  $y$  vérifie  $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow z'(x) = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in ]0, 1[, z(x) = -\ln(1-x) + \lambda$ .

Sur  $]0, 1[$  les solutions sont les fonctions  $x \mapsto \frac{\lambda}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x}$ .

1b Idem sur  $] -\infty, 0[$  On obtient de même méthode sur  $] -\infty, 0[$ .

Sur  $] -\infty, 0[$  les solutions sont les fonctions  $x \mapsto \frac{\mu}{x} - \frac{1}{x} \ln(1-x)$ .

2: Recollement des solutions

Soit  $y$  une solution de  $(\mathcal{E})$  sur  $] -\infty, 0[$ .

On a donc  $y(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\mu}{x} - \frac{1}{x} \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

Continuité en 0 :

• Limite à droite en 0:

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$  donc si  $\lambda \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \pm\infty$ .

donc  $y$  admet une limite à droite en 0 si et seulement si  $\lambda = 0$  et dans ce cas  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$ .

• Limite à gauche en 0:

De même  $y$  admet une limite à gauche en 0 si et seulement si  $\mu = 0$  et dans ce cas  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$ .

Conclusion: Nécessairement  $y(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

Dérivabilité en 0.

On a, pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  donc  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$  si  $x \neq 0$  et cette égalité vaut pour  $x = 0$  donc  $y$  de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$  donc dérivable en 0.

Conclusion: La fonction  $y$  est dérivable sur  $] -\infty, 1[$ , vérifie  $(\mathcal{E})$  sur  $] \infty, 1[ \setminus \{0\}$

De plus, en  $x = 0$ : on a  $0y'(0) + y(0) = y(0) = 1$  donc  $y$  vérifie  $(\mathcal{E})$  sur  $] \infty, 1[$ .

C'est donc l'unique solution sur  $] -\infty, 1[$ .

**Exercice 2** (Mines ponts) On définit, pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$  et  $N_2(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$ .

1. Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont des norme de  $\mathbb{R}[X]$ .

2. Les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont elles équivalentes?

**Solution de l'exercice:** 1: La définition de  $N_1$  est assurée car la somme est finie.

La définition de  $N_2$  est assurée car un polynôme est continu donc borné sur le segment  $[0, 1]$ .

De plus,  $N$  est une norme de  $E$  si et seulement si  $\begin{cases} \forall P \in E, N(P) \geq 0 : (i) \text{ et } N(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0 : (ii) \\ \forall P \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda P) = |\lambda| N(P) : (iii) \\ \forall (P, Q) \in E^Z, N(P+Q) \leq N(P) + N(Q) : (iv) \end{cases}$ .

Le point (i) est vérifié pour  $N_1$  et  $N_2$ .

Si  $N_1(P) = 0$ , alors  $\forall k, P^{(k)}(0) = k! a_k = 0$  donc  $P$  est nul.

Si  $N_2(P) = 0$ , alors  $P$  admet une infinité de racines (tout réel de  $[0, 1]$ ) donc est nul.

Le point (ii) est vérifié pour  $N_1$  et  $N_2$ .

Les points (iii) et (iv) pour  $N_1$  découlent des points (iii) et (iv) pour la valeur absolue.

Les points (iii) et (iv) pour  $N_2$  sont connus (cours sur la norme infinie).

2: Posons  $P_n = X^n$ . On a  $P_n^{(k)}(0) = 0$   $P_n^{(n)} = n!$  donc  $N_2(P_n) = n! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $N_1(P_n) = 1$

Il n'existe donc par de réel  $C$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, N_2(P_n) \leq N_1(P_n)$

**Exercice 3** (mines télécom): On cherche les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x : (\mathcal{E})$$

- Justifier que si  $f$  vérifie  $(\mathcal{E})$  alors  $f$  est de classe  $C^\infty$  et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
- Déterminer les fonctions vérifiant  $(\mathcal{E})$ .

**Solution de l'exercice:**

1: Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$ .

On a donc  $f'(x) = e^x - f(-x)$  donc  $f'$  est de classe  $C^1$  comme somme de fonctions  $C^1$  donc  $f$  de classe  $C^2$

On montre de même que si  $f$  est  $C^n$  alors  $f$  est  $C^{n+1}$  donc  $f$  est  $C^\infty$ .

De plus,  $f''(x) = e^x + f'(-x)$  or  $f'(-x) = e^{-x} - f(x)$  donc  $f$  vérifie l'équation différentielle  $(\mathcal{E}')$  :  $y'' + y = e^x + e^{-x}$ .

2: Analyse: Supposons que  $f$  vérifie  $(\mathcal{E})$ . Alors  $f$  vérifie  $(\mathcal{E}')$ .

On remarque que  $x \mapsto ch(x)$  est une solution particulière de  $(\mathcal{E}')$

dont les solutions sont les fonctions  $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + ch(x)$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

Synthèse: Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + ch(x)$ .

On a  $f'(x) + f(-x) = -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) + sh(x) + \lambda \cos(x) - \mu \sin(x) + ch(x)$

donc  $f'(x) + f(-x) = (\mu + \lambda) \cos(x) - (\lambda + \mu) \sin(x) + e^x$ .

Donc  $f$  est solution vérifie  $(\mathcal{E})$  si et seulement si  $\lambda = -\mu$  (prendre par exemple  $x = 0$ ).

L'ensemble des fonctions solutions est donc l'ensemble des fonctions  $x \mapsto \lambda(\cos(x) - \sin(x)) + ch(x)$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 4** (CCINP): Soit  $E$  l'ensemble des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  vérifiant  $f(0) = 0$ .

Pour  $f \in E$ , on pose  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ ,  $N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$  et  $N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$ .

- Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont des normes de  $E$ .
- Soit  $f \in E$ . Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$   $e^x f(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt$ .
- En déduire que les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes.

**Solution de l'exercice:** On admet que  $E$  est un espace vectoriel (vérification immédiate)

1: On sait que la norme infinie est une norme: 
$$\begin{cases} \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty : (1) \\ \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty : (2) \\ \|f\|_\infty \geq 0 \text{ et } \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0 : (3) \end{cases}$$

Il en découle facilement que (1), (2) et (3) sont vérifiées par  $N_1$  et (1) et (2) sont vérifiées par  $N_2$

Seul  $N_2(f) = 0 \Rightarrow f = 0$  n'en découle pas directement.

Soit  $f \in E$ . Supposons  $N_2(f) = 0$ . On a  $\|f + f'\|_\infty = 0$  donc  $f' + f = 0$

donc  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], f(x) = \lambda e^{-x}$ . Or  $f \in E$  donc  $f(0) = 0$  donc  $\lambda = 0$  donc  $f = 0$ .

2: Soit  $f \in E$ . Posons  $g(x) = e^x f(x)$ . La fonction  $g$  est dérivable (car  $f$  l'est) et 
$$\begin{cases} g'(x) = e^x (f(x) + f'(x)) \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

On a donc  $g(x) = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t) dt = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt$ .

3: Il s'agit de montrer l'existence de  $(\alpha, \beta) \in ]0, +\infty[^2$  vérifiant:  $\forall f \in F, \alpha N_2(f) \leq N_1(f) \leq \beta N_2(f)$ .

Soit  $f \in E$ . On a  $N_2(f) = \|f + f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N_1(f)$ . On peut donc prendre  $\alpha = 1$ .

On a  $|e^x f(x)| = \left| \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt \right| \leq \int_0^x |e^t (f(t) + f'(t))| dt \leq \int_0^x e^x \|f + f'\|_\infty dt$

donc  $|e^x f(x)| \leq x e^x \|f + f'\|_\infty \leq e^x \|f + f'\|_\infty$ .

On en déduit que  $\forall x \in [0, 1] |f(x)| \leq \|f + f'\|_\infty$  donc  $\|f\|_\infty \leq \|f + f'\|_\infty$ .

De plus  $\|f'\|_\infty = \|f + f' - f\|_\infty \leq \|f + f'\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2 \|f + f'\|_\infty$ . On peut donc prendre  $\beta = 3$ .

**Exercice 5** (mines télécom) Soit  $\lambda > 0$  et (E) l'équation différentielle  $xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$ .

1. Exprimer à l'aide d'une intégrale les solutions de (E) sur  $]0, +\infty[$ .

2. Montrer qu'il existe une unique solution bornée au voisinage de  $0^+$ .

**Solution de l'exercice:**

1: • Equation homogène: Soit (H) :  $xy' + \lambda y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{\lambda}{x}y = 0$  l'équation homogène associée à (E) sur  $]0, +\infty[$ .

Les solutions de (H) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \mu e^{-\lambda \ln(x)} = \mu x^{-\lambda}$ .

• Posons  $y(x) = z(x)x^{-\lambda}$  (variation de la constante).

On a  $xy'(x) + \lambda y(x) = \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow xx^{-\lambda}z'(x) = \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow z'(x) = \frac{x^{\lambda-1}}{(1+x)}$ .

Une solution particulière est obtenue avec  $z(x) = \int_1^x \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$ : On pose  $y_p(x) = x^{-\lambda} \int_1^x \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$ .

Les solutions de (E) sur  $]0, +\infty[$  sont les fonctions définies par  $y(x) = x^{-\lambda} \left( \int_1^x \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt + \mu \right)$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$  fixé.

2: On a  $\lambda > 0$  donc  $1 - \lambda < 1$  et l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\lambda}} dt$  est convergente.

De plus,  $\frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^{1-\lambda}} > 0$  donc l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$  est convergente.

On en déduit que la fonction  $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$  a pour limite  $-\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$  lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ .

Si  $\mu \neq \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \int_1^x \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt + \mu \right) \neq 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y(x) = \div \infty$ .

Si  $\mu = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$  alors  $y(x) \underset{\text{Chasles}}{=} x^{-\lambda} \int_0^x \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt \leq x^{-\lambda} \int_0^x \frac{1}{t^{1-\lambda}} dt$ .

Or  $\int_0^x \frac{1}{t^{1-\lambda}} dt = \int_0^x t^{\lambda-1} dt = \left[ \frac{1}{\lambda} t^\lambda \right]_0^x = \frac{1}{\lambda} x^\lambda$  donc  $0 \leq y(x) \leq \frac{1}{\lambda}$  donc  $y$  est donc une fonction bornée.

**Exercice 6** (Mines ponts): Montrer qu'il existe  $A \in O_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $M \in O_n(\mathbb{R})$ , on a

$$\text{tr}(A - I_n) \times \text{tr}(A^T + I_n) \leq \text{tr}(M - I_n) \times \text{tr}(M^T + I_n)$$

**Solution de l'exercice:** On a vu (voir cours) que  $O_n(\mathbb{R})$  est une partie fermée et bornée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

De plus, l'application  $\varphi : M \mapsto \text{tr}(M - I_n) \times \text{tr}(M^T + I_n)$  est continue car

- $M \mapsto \text{tr}(M)$  et  $M \mapsto M^T$  sont continues car linéaires sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui est de dimension finie.
- le produit matriciel est continu.

Le théorème des bornes atteintes permet de conclure que  $\varphi$  admet un minimum sur  $O_n(\mathbb{R})$  c'est-à-dire qu'il existe  $A \in O_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $M \in O_n(\mathbb{R})$ , on a  $\varphi(A) \leq \varphi(M)$ .

**Exercice 7** (Mines ponts): Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $xy' - ny = 0 : (\mathcal{E})$ .

**Solution de l'exercice:** Sur  $]0, +\infty[$ ,  $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow y' - \frac{n}{x}y = 0$  dont les solutions sont les fonctions:

$$x \mapsto \lambda \exp(n \ln(x)) = \lambda x^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

De même, les solutions sur  $] -\infty, 0[$  sont les fonctions  $x \mapsto \mu x^n, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Recollement des solutions sur  $\mathbb{R}$ : Soit  $f$  une solutions sur  $\mathbb{R}$ . On a donc  $\begin{cases} f(x) = \lambda x^n \text{ si } x > 0 \\ f(x) = \mu x^n \text{ si } x < 0 \end{cases}$ .

- Continuité en 0: On a  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  donc on pose  $f(0) = 0$  et  $f$  est continue en 0.

- Dérivabilité en 0: On a  $f'(x) = n\lambda x^{n-1}$  si  $x > 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$  si  $n \geq 2$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = n\lambda$  si  $n = 1$ .

La fonction  $f$  est continue en 0 donc on peut appliquer le théorème "limite de la dérivée sur  $\mathbb{R}_+$  en 0:

La fonction  $f$  est dérivable à droite en 0 et  $f'_d(0) = \begin{cases} n\lambda & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$ .

On obtient de même que  $f'_g(0) = \begin{cases} n\mu & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$ . On en déduit que

- si  $n = 1$ ,  $f$  est dérivable en 0 si et seulement si  $\lambda = \mu$ .

Les solutions pour  $n = 1$  sont donc les fonctions  $x \mapsto \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

- si  $n \geq 2$ ,  $f$  est dérivable en 0 pour toute valeur  $(\lambda, \mu)$

Les solutions pour  $n = 2$  sont donc les fonctions  $x \mapsto \begin{cases} f(x) = \lambda x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \mu x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

(Ces fonctions vérifient bien l'équation  $(\mathcal{E})$  en  $x = 0$ ).

Remarque: Si  $n \geq 2$ , On considère  $f_1 : x \mapsto \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$  et  $f_2 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ x^n & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  est  $\text{vect}(f_1, f_2)$  qui est un espace vectoriel de dimension 2 bien que l'équation soit du premier ordre.

**Exercice 8** (mines ponts) Soit  $E$  un espace normé et  $C$  une partie convexe de  $E$ .

1. Montrer que l'adhérence de  $C$  est une partie convexe de  $E$  qui contient  $C$ .
2. On appelle intérieur de  $C$  l'ensemble des points  $a \in E$  qui sont intérieurs à  $C$  c'est-à-dire vérifiant :  
 $\exists r > 0, \forall x \in E, \|x - a\| < r \implies x \in C$ .  
 Montrer que l'intérieur de  $C$  est une partie convexe de  $E$  contenue dans  $C$ .

**Solution de l'exercice:**

1: Notons  $A$  l'adhérence de  $C$ .

a: si  $a \in C$  alors  $a$  est limite de la suite de  $C$  constante égale à  $a$  donc  $a \in A$  donc  $C \subset A$ .

b: Soit  $(a, b) \in A^2$ . de sorte qu'il existe deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  de  $C$  qui convergent respectivement vers  $a$  et  $b$ .

Soit  $\lambda \in [0; 1]$ , posons  $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$  et  $z_n = \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n$ .

-  $\forall n, z_n \in C$  car  $x_n$  et  $y_n$  le sont et  $C$  est convexe.

-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = c$  donc  $c \in A$ .

On en déduit que  $A$  est convexe.

2: Notons  $B$  l'ensemble des points intérieurs de  $C$  et  $\mathcal{B}_o$  les boules ouvertes.

Soit  $(a, b) \in B^2$ . Il existe  $r_a > 0$  tel que  $\mathcal{B}_o(a, r_a) \subset C$  et Il existe  $r_b > 0$  tel que  $\mathcal{B}_o(b, r_b) \subset C$ .

en posant  $r = \min(r_a, r_b)$ , on a  $\mathcal{B}_o(a, r) \subset C$  et  $\mathcal{B}_o(b, r) \subset C$ .

Soit  $\lambda \in [0; 1]$ , posons  $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$

Soit  $x$  vérifiant  $\|x\| < r$ . On a  $c + x = \lambda a + (1 - \lambda)b + x = \lambda a + (1 - \lambda)b + (\lambda + (1 - \lambda))x$

donc  $c + x = \lambda(a + x) + (1 - \lambda)(b + x) \in C$  car  $a + x \in C$  et  $b + x \in C$  et  $C$  est convexe.

On en déduit que  $\mathcal{B}_o(c, r) \subset C$  donc  $c \in B$  donc  $B$  est convexe.

**Exercice 9** (Mines ponts) On considère l'équation différentielle  $(\mathcal{E}) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$  où  $a$  et  $b$  désignent des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $f$  et  $g$  deux solutions de  $(\mathcal{E})$ . Exprimer la fonction  $W = fg' - f'g$  à l'aide de la fonction  $a$  et de  $W(0)$ .
2. On suppose  $a$  impaire et  $b$  paire.  
 Montrez que la fonction  $f$  solution de  $(\mathcal{E})$  vérifiant les conditions initiales  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$  est paire.  
 Montrez de même que la fonction  $g$  solution de  $(\mathcal{E})$  vérifiant les conditions initiales  $g(0) = 0$  et  $g'(0) = 1$  est impaire.  
 En déduire qu'il existe une base de l'espace des solutions de  $(\mathcal{E})$  constituée d'une fonction paire et impaire.

3. On suppose qu'il existe une base de l'espace des solutions de  $(\mathcal{E})$  constituée d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

**a** Montrez que  $a$  est impaire

**b** En déduire que  $b$  paire.

**Solution de l'exercice:** 1: On a  $W' = f'g' + fg'' - f''g - f'g' = fg'' - f''g = -f(ag' + bg) + (af' + bf)g$ .  
Donc  $W' = -aW$ . Il existe donc un réel  $\lambda$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, W(t) = \lambda e^{-A(t)}$  avec  $A(t) = \int_0^t a(u) du$ .

En évaluant en  $t = 0$ , on obtient que  $\lambda = W(0)$  donc  $\forall t \in \mathbb{R}, W(t) = W(0) e^{-\int_0^t a(u) du}$ .

2: On pose  $\varphi(t) = f(-t)$ . La fonction  $\varphi$  est deux fois dérivable et  $\varphi'(t) = -f'(-t)$  et  $\varphi''(t) = f''(-t)$  donc

$$\begin{aligned} \varphi''(t) + a(t)\varphi'(t) + b(t)\varphi(t) &= f''(-t) - a(t)f'(-t) + b(t)f(-t) \\ &= f''(-t) + a(-t)f'(-t) + b(-t)f(-t) = 0 \end{aligned}$$

donc  $\varphi$  vérifie  $(\mathcal{E})$ .

De plus,  $\varphi(0) = 1$  et  $\varphi'(0) = 0$  et les fonctions  $a$  et  $b$  étant continues.

Le théorème de Cauchy permet de dire que  $\varphi = f$  donc  $f$  est paire.

On montre de même, en introduisant  $\psi(x) = -g(-t)$  que  $g$  est impaire.

La famille  $(f, g)$  est libre (prendre la valeur en 0 de  $\lambda f + \mu g$ ) et l'ensemble des solutions de l'ED linéaire homogène du deuxième ordre  $(\mathcal{E})$  est de dimension 2 donc admet  $(f, g)$  comme base.

Q3a: Supposons que  $(f, g)$  est une base de solutions de  $(\mathcal{E})$  et que  $f$  soit paire et  $g$  soit impaire. Alors  $W$  est une fonction paire (car la dérivée change la parité).

Or  $W(0) = f(0)g'(0) \neq 0$  car si  $g'(0) = 0$  alors  $(g(0), g'(0)) = (0, 0)$  donc par le théorème de Cauchy,  $g = 0$  (qui est l'unique solution de l'équation étant homogène  $(\mathcal{E})$  vérifiant ces conditions initiales) ce qui contredit le fait que  $g$  n'est pas la fonction nulle.

et de même,  $f(0) \neq 0$ . On a donc  $W(0) \neq 0$ .

On en déduit que  $t \mapsto \int_0^t a(u) du$  est paire donc, par dérivation,  $a$  est impaire.

Q3b: Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

• Commençons par supposer que  $f(t) \neq 0$ .

On a alors  $f(t)b(t) = -(f''(t) + a(t)f'(t))$  et  $f(-t)b(-t) = -(f''(-t) + a(-t)f'(-t))$  donc comme  $a$  est impaire et  $f$  est paire  $f(t)b(-t) = -(f''(t) + a(t)f'(t))$ . Or  $f(t) \neq 0$  donc  $b(-t) = b(t)$ .

• Soit  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $f(t) = 0$ .

Si  $f'(t) = 0$ . Soit  $h$  la fonction nulle qui est solution de l'équation homogène  $(\mathcal{E})$ .

En appliquant le théorème de Cauchy en  $t$ , on aurait  $f = h$ , ce qui n'est pas possible car  $(f, g)$  est libre.

On a donc  $f'(t) \neq 0$ .

Supposons  $f'(t) > 0$ . La fonction  $f'$  est continue donc il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\forall x \in ]t - \alpha, t + \alpha[, f'(x) > 0$ .

La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $]t - \alpha, t + \alpha[$  donc si  $x \in ]t - \alpha, t + \alpha[, f(x) \neq 0$ .

D'après le premier cas, on en déduit que  $b(-x) = b(x)$ .

En utilisant la continuité de  $b$ , on peut passer à la limite quand  $x$  tend vers  $t$  et on obtient  $b(-t) = b(t)$

On en déduit que  $b$  est paire.

**Exercice 10 (Centrale)** Pour  $n \geq 1$ , on pose  $E_n$  l'ensemble des polynômes unitaires de degré  $n$  à coefficients réels. Montrer que  $\inf_{P \in E_n} \left( \int_0^1 |P(t)| dt \right) > 0$ .

**Solution de l'exercice:**  $\left\{ \int_0^1 |P(t)| dt, P \in E_n \right\}$  est non vide minoré par 0 donc  $\inf_{P \in E_n} \left( \int_0^1 |P(t)| dt \right)$  existe et  $\inf_{P \in E_n} \left( \int_0^1 |P(t)| dt \right) \geq 0$

**Première méthode:** Supposons  $\inf_{P \in E_n} \left( \int_0^1 |P(t)| dt \right) = 0$ . Par la caractérisation de la borne inférieure avec les suites (fait dans une autre feuille de révision),

il existe une suite  $(P_k)$  vérifiant 
$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^*, P_k \in E_n \\ \int_0^1 |P_k(t)| dt \leq \frac{1}{n} \end{cases} .$$

L'égalité  $N(P) = \int_0^1 |P(t)| dt$  définit une des normes équivalentes de  $\mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$  donc  $N(P_k - 0) \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} 0$  donc la suite  $(P_k)$  tend vers le polynôme nul.

Posons  $P_k = \sum_{i=0}^n a_{i,k} X^k$  avec  $a_{n,k} = 1$ . La convergence dans  $\mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$  équivaut à la convergence "coordonnée par coordonnée". Or  $0 = \sum_{i=0}^n 0X^k$  donc  $\forall i \in [[0, n]]$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i,k} = 0$ , ce qui n'est pas possible pour  $i = n$  donc

$$\inf_{P \in E_n} \left( \int_0^1 |P(t)| dt \right) > 0$$

**Deuxième méthode:** On cherche à appliquer le th des bornes atteintes mais  $E_n$  n'est pas borné.

On a  $\int_0^1 |t^n| dt = \frac{1}{n+1} \leq 1$ .

Soit  $E'_n$  l'ensemble des polynômes unitaires de degré  $n$  à coefficients réels vérifiant  $\int_0^1 |P(t)| dt \leq 1$ .

Les bornes inférieures de  $\int_0^1 |P(t)| dt$  sur les ensembles  $E_n$  et  $E'_n$  sont égales car si  $P \in E_n \setminus E'_n$   $\int_0^1 |P(t)| dt > 1$ .

Montrons que  $E'_n$  est fermé et borné.

L'égalité  $N(P) = \int_0^1 |P(t)| dt$  définit une des norme équivalente de  $\mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$  et  $\forall P \in E'_n$   $N(P) \leq 1$  donc  $E'_n$  est borné.

Soit  $(P_k)$  une suite de  $E'_n$  qui converge vers  $P$ .

On a donc  $N(P_k) \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} N(P)$  donc  $N(P) \leq 1$  car la fonction étant une norme, elle est lipschitzienne donc continue.

De plus les suites des coordonnées de  $(P_k)$  dans la base canonique convergent vers les coordonnées de  $P$  donc  $P$  est aussi unitaire donc  $P \in E'_n$  donc  $E'_n$  est fermé. La fonction  $N$  admet donc un minimum  $N(P_0)$  sur  $E'_n$  et ce minimum  $N(P_0)$  est non nul car  $P_0 \neq 0$  car  $P_0 \in E_n$ .