mercredi 3 juin 2026 **(équa diffs)**

Exercice 1 *(ccinp) Soit les équations* $(E_0) : x^2y'' - 2y = 0$ *et* $(E) : x^2y'' - 2y = x^3$*.*

1. *Trouver une solution polynomiale* $\mathfrak{u}$ *de* (E_0)*.*
2. *Trouver une fonction* v *solution de* (E_0)*, indépendante de* $\mathfrak{u}$*, écrite sous la forme* $v(x) = \mathfrak{u}(x)z(x)$ *avec* z *de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$*.*
3. *Déduire de la question précédente les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$*.*
4. *Trouver toutes les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$*.*

Solution de l'exercice:

1: On remarque que $y : x \mapsto x^2$ est une solution polynomiale de (E_0).

Si on ne fait pas cette remarque, on suppose que $y : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ de (E_0) avec $a_n \neq 0$ est solution.

• En identifiant les termes en x^n dans (E_0), on a $n(n-1)a_n - 2a_n = 0$ donc, comme $a_n \neq 0$,
il vient $n(n-1) - 2 = n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1) = 0$ donc $n = 2$ car $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi, s'il existe une solution polynomiale de (E_0), elle est forcément de degré 2 .

• On pose $y(x) = ax^2 + bx + c$.
On a y solution de $(E_0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ax^2 - 2\left(ax^2 + bx + c\right) = -2bx - c = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$.
Les fonctions $x \mapsto ax^2$ sont donc solutions de (E_0) .

2: Soit v de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $z : x \mapsto \frac{v(x)}{x^2}$. la fonction z est aussi de classe C^2 et $v(x) = x^2 z(x)$.
On a donc $v'(x) = 2xz(x) + x^2z'(x)$ et $v''(x) = 2z(x) + 4xz'(x) + x^2z''(x)$.
Ainsi, v est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\forall x \in I, 2x^2z(x) + 4x^3z'(x) + x^4z''(x) - 2x^2z(x) = 0$
c'est-à-dire si et seulement si z vérifie $(F) : xz''(x) + 4z'(x) = 0$,ce qui équivaut au fait que

$$\boxed{z' \text{ vérifie } (G) : xw' + 4w = 0 : (G)}$$

Or z' vérifie (G) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, z'(x) = \frac{\lambda}{x^4}$ donc
les solutions de (F) sont donc les fonctions $z : x \mapsto \frac{\alpha}{x^3} + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on trouve donc $z(x) = \frac{1}{x^3}$ donc $v : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les fonctions u et v ne sont pas proprtionnelles donc (u, v) est une famille libre.
On peut faire de même sur $\mathbb{R}_-^*$

3: • l'équation (E_0) est linéaire, homogène et normalisée, l'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est un espace vectoriel de dimension 2 , il est donc engendrée par u et v d'après les deux questions précédentes. Les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont donc les fonctions $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^2$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

• On constate comme en a. que $y_p : x \mapsto \dfrac{x^3}{4}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
On peut faire de même sur $\mathbb{R}_-^*$

4: - Analyse : soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, ainsi y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Les restrictions de y à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont les solutions vues en **Q3**. donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x < 0, y(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \beta_1 x^2 + \frac{x^3}{4} \text{ et } \forall x > 0, y(x) = \frac{\alpha_2}{x} + \beta_2 x^2 + \frac{x^3}{4}.$$

• Continuité en 0: En prenant $x = 0$ dans (E), on a $y(0) = 0$.
La continuité de y en 0 implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et donc

$$\forall x \leq 0, y(x) = \beta_1 x^2 + \frac{x^3}{4} \text{ et } \forall x \geq 0, y(x) = \frac{\alpha_2}{x} + \beta_2 x^2 + \frac{x^3}{4} : (R).$$

• Dérivabilité en 0: On a, d'après (R), $y_d'(0) = 2\beta_2 \times 0 = 0$ et $= y_g'(0) = 2\beta_1 \times 0 = 0$ donc y est dérivable en 0 et $\forall x \leq 0, y'(x) = 2\beta_1 x + \frac{3x^2}{4}$ et $\forall x \geq 0, y'(x) = 2\beta_2 x + \frac{3x^2}{4}$.
• Dérivée seconde en 0: On a alors $y_d''(0) = 2\beta_2$ et $y_d''(0) = 2\beta_1$ donc $\beta_1 = \beta_2$.
- Synthèse : Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$, alors
- y est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$,
- y vérifie (E) sur $\mathbb{R}^*$
- et y vérifie aussi (E) en $x = 0$ (tous les termes s'annulent en 0).
Conclusion : les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les $y : x \mapsto \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 *(ccinp)*

1. *Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0 : (E)$.*

2. *Existe-t-il des solutions sur $]-\infty, 0[$ non développables en série entière?*

Solution de l'exercice: 1: Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$.
On pose, pour $x \in]-R, R[, .y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$$\begin{aligned}
y \text{ vérifie } (E) &\Leftrightarrow 4x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 9x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (4n(n-1) - 2n)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 9a_n x^{n+2} = 0 \\
- &\Leftrightarrow 2a_1 + 4a_2 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left((2(n+1)(2n-1))a_{n+1} + 9a_{n-2}\right)x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = 0 \\ \text{et } \forall n \geq 2, ((2(n+1)(2n-1))a_{n+1} + 9a_{n-2}) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = 0 \\ \text{et } \forall n \geq 0, a_{n+3} = \dfrac{-9a_n}{2(n+3)(2n+3)} \end{cases} : (\mathcal{C})
\end{aligned}$$

On vérifie par récurrence que $(\mathcal{C})$ entraîne que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0 : (\mathcal{C}_1)$
et $a_{3k} = -\dfrac{9}{(6k-3) \times (6k)} a_{3(k-1)} = -\dfrac{1}{2k \times (2k-1)} a_{3(k-1)}$ et finalement $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{3k} = \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} a_0 : (\mathcal{C}_2)$.
On a donc $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} x^{3k}$.
Il est clair que $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ entraîne $(\mathcal{C})$ donc entraîne que y vérifie $(\mathcal{E})$. On a donc raisonné par équivalence.
• Si $x \geq 0$, alors $y(x) = a_0 \times \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{2k} = a_0 \times \cos\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$ et

• Si $x < 0$, $\left(x\sqrt{-x}\right)^{2k} = (x)^{2k}(-x)^k = (-1)^k x^{3k}$ donc $y(x) = a_0 \times \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\left(x\sqrt{-x}\right)^{2k}}{(2k)!} = a_0 \times ch\left(x\sqrt{-x}\right)$
(il est inutile de déterminer le rayon de convergence car on retombe sur des séries entières connues).
2: Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, $(E) \Leftrightarrow y'' - \dfrac{1}{2x}y' + \dfrac{9}{4}xy = 0$ qui est homogène normalisée donc l'ensemble des solutions sur $]-\infty, 0[$ est un espace vectoriel de dimension 2.
Les solutions développables en série entières sont les fonctions colinéaires à $x \mapsto ch\left(x\sqrt{-x}\right)$ qui forment un espace vectoriel de dimension 1.
Conclusion: Il existe d'autres solutions.

Exercice 3 *(ccinp) On se propose de déterminer des fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant:*

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}^*, f'\left(-\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

1. *On suppose que f vérifie (E). Déterminer une équation différentielle du second ordre (E') vérifiée par f.*
2. *Quelles sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^a$ solutions de (E') sur $]0, +\infty[$.*
   Résoudre (E') sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$
3. *Conclure.*

Solution de l'exercice:

1: On a $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'\left(-\frac{1}{x}\right) = f(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = f\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ donc f' est dérivable comme composée de fonctions dérivable.

En dérivant l'égalité, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} f'\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2} f'(x)$ donc f vérifie $(E') : y'' - \dfrac{1}{x^2} y = 0.$

2. Remarque: Si α et β sont deux réels disctincts, les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^\alpha$ ne sont pas colinéaires car le quotient $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$ n'est pas constant sur $]0, +\infty[$.

Sur $]0, +\infty[$:

En prenant $u : x \mapsto x^a$, on trouve que u vérifie (E') si et seulement si $(a(a-1)-1)\, x^{a-2} = 0$ soit $(a(a-1)-1) = 0$ soit $a^{2-}a - 1 = 0$.

On trouve $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = r_1$ et $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = r_2$.

On en déduit que $f_i : x \mapsto x^{r_i}$ est solution de (E') pour $i \in \{1, 2\}$.

Or (f_1, f_2) est libre (remarque) et l'équation est homogène et normalisée sur $]0, +\infty[$ donc l'ensemble des solutions de (E') est un espace vectoriel de dimension 2 qui est donc est égal à $vect\,(f_1, f_2)$.

Sur $]-\infty, 0[$:

En prenant $u : x \mapsto (-x)^a$, on trouve de même que u vérifie (E') si et seulement si $a = r_1$ ou $a = r_2$.

On en déduit que $g_i : x \mapsto (-x)^{r_i}$ est solution de (E') pour $i \in \{1, 2\}$.

De même; l'ensemble des solutions de (E') est égal à $vect\,(g_1, g_2)$.

3 Si f vérifie (E) alors f vérifie (E') sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ donc donc $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x > 0,\ f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ et $\exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x > 0,\ f(x) = \mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x)$.

Si $x > 0$, alors $f'(x) = \lambda_1 r_1 x^{r_1 - 1} + \lambda_2 r_2 x^{r_2 - 1} = \lambda_1 r_1 x^{-r_2} + \lambda_2 r_2 x^{-r_1}$ car $r_1 + r_2 = 1$ et $f\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \mu_1 x^{-r_1} + \mu_2 x^{-r_2}$.

En utilisant la liberté de $(x \mapsto x^{-r1}, x \mapsto x^{-r_2})$, $\forall x > 0,\ f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 r_1 = \mu_2 \\ \lambda_2 r_2 = \mu_1 \end{cases}$.

On trouve la même condition pour $x < 0$.

CONCLUSION: f est solution de (E) si et seulement si

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \forall x > 0,\ f(x) = \lambda_1 x^{r_1} + \lambda_2 x^{r_2} \\ \forall x < 0,\ f(x) = \lambda_2 r_2 \times (-x)^{r_1} + \lambda_1 r_1 \times (-x)^{r_2} \end{cases}$$

Exercice 4 *(ccinp 2018) On considère l'équation différentielle $t\,(t^2-1)\, x'(t) + 2x(t) = t^2 : (\mathcal{E})$*

1. *Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{t\,(t^2-1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-1} + \dfrac{c}{t+1}$.*
2. *Résoudre $(\mathcal{E})$ sur $]1, +\infty[$.*

3. *Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par* $t \to \begin{cases} \dfrac{\ln(t)}{t-1} \text{ si } t \neq 1 \\ 1 \text{ si } t = 1 \end{cases}$

   et g la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h \to \begin{cases} \dfrac{\ln(1+h)}{h} \text{ si } h \neq 0 \\ 1 \text{ si } h = 0 \end{cases}$.

   Montrer que les fonctions f et g sont de classe C^∞

4. *Résoudre $(\mathcal{E})$ sur $]0,+\infty[$.*

5. *Résoudre $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.*

Solution de l'exercice: 1: On a $\dfrac{a}{t}+\dfrac{b}{t-1}+\dfrac{c}{t+1}=\dfrac{(a+b+c)\,t^2+(b-c)\,t-a}{t\,(t^2-1)}$.
Le triplet $(a,b,c)=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ convient.
2: Sur $]1,+\infty[$, $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow x'(t)+\dfrac{2}{t\,(t^2-1)}x(t)=\dfrac{t^2}{t\,(t^2-1)}$.
Une primitive de $t \mapsto \dfrac{2}{t\,(t^2-1)}$ est $t \mapsto -2\ln(t)+\ln(t-1)+\ln(t+1)$ donc l'équation homogène a pour solution $t \mapsto \lambda e^{2\ln(t)-\ln(t-1)-\ln(t+2)}=\lambda\dfrac{t^2}{t^2-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
En posant $y(t)=z(t)\,\dfrac{t^2}{t^2-1}$, y vérifie $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow z'(t)\,\dfrac{t^2}{t^2-1}=\dfrac{t^2}{t\,(t^2-1)} \Leftrightarrow z'=\dfrac{1}{t}$.
On en déduit que les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]1,+\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto \dfrac{(\ln(t)+\lambda)\,t^2}{(t^2-1)}$.

3: $g(h)=\dfrac{\ln(1+h)}{h}=-\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}h^n}{h}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}h^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}h^n$ donc g est développable en série entière sur $]-1,1[$ donc est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
On a $f(t)=g(t-1)$ donc f est aussi de classe C^∞.
4: En procédant de même, les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0,1[$ sont les fonctions $t \mapsto \dfrac{(\ln(t)+\mu)\,t^2}{(t^2-1)}$.
D'après Q3, la fonction $t \mapsto$-$\dfrac{t^2\ln(t)}{(t^2-1)}=\dfrac{\ln(t)}{t-1}\times\dfrac{t^2}{t+1}$ admet une limite réelle en $t=1$ donc le recollement par continuité en 1 donne $\lambda=\mu=1$.
On a donc $x(t)=\begin{cases} \dfrac{t^2\ln(t)}{(t^2-1)} \text{ si } t \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } t=1 \end{cases}$ et cette fonction est C^∞ donc de classe C^1 d'après Q3.
5: Soit $x:]-\infty,0[\to \mathbb{R}$. Posons $z(t)=x(-t)$.
La fonction x vérifie $(\mathcal{E})$ sur $]-\infty,0[$ si et seulement si
$\forall t \in]-\infty,0[\ t\,(t^2-1)\,x'(t)+2x(t)=t^2$ soit $\forall t \in]0,+\infty[\ (-t)\left((-t)^2-1\right)x'(-t)+2x(-t)=(-t)^2$ c'est-à-dire
$\forall t \in]0,+\infty[,\ t\,(t^2-1)\,z'(t)+2z(t)=t^2$. On en déduit grace à Q4
que $z(t)=\begin{cases} \dfrac{t^2\ln(t)}{(t^2-1)} \text{ si } t \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } t=1 \end{cases}$ donc $x(t)=\begin{cases} \dfrac{t^2\ln(-t)}{(t^2-1)} \text{ si } t \neq -1 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } t=1 \end{cases}$.
Il reste à étudier le recollement en 0.
On a bien $\lim\limits_{t\to 0^+} t^2\ln(t)=0$ et on peut donc poser $x(0)=0$.
En posant $u(t)=t^2\ln(t)$, on a $u'(t)=2t\ln(t)+t$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} u'(t)=0$
Le théorème limite de la dérivée entraîne que x est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.
On montre de même que x est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$ (la fonction x est paire)

Exercice 5 *(ccp) On considère l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + 2y = 1 : (\mathcal{E})$.*

1. *Trouver une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$.*
2. *Avec le changement de variable $x = e^t$, résoudre l'équation $(\mathcal{E})$sur $]0, +\infty[$.*

Solution de l'exercice:
1: On remarque que $x \mapsto \dfrac{1}{2}$ est solution de $(\mathcal{E})$sur $]0, +\infty[$.
2: Soit z la fonction définie par $z(t) = y(e^t)$.
Si y est deux fois dérivable alors z l'est et on a $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z''(t) = e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t)$
donc $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = (e^t)^2 y''(e^t) + 4e^t y'(e^t) + 2y(e^t)$ donc
y vérifie $(\mathcal{E}) : x^2y'' + 4xy' + 2y = 1$ sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z vérifie $(\mathcal{E}') : z'' + 3z' + 2z = 1$ sur $\mathbb{R}$
L'équation caractéristique de $(\mathcal{E}')$ admet deux racines réelles -1 et -2
donc $(\mathcal{E}')$ a pour solutions $z : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{-2t}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Or $\forall x \in]0, +\infty[$, $y(x) = z(\ln(x))$ donc
y vérifie $(\mathcal{H})$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x > 0$, $y(x) = \dfrac{\lambda}{x} + \dfrac{\mu}{x^2} + \frac{1}{2}$.

Exercice 6 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \cos(\alpha \times \arcsin(x))$.*

1. *Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par la fontion f sur un intervalle à préciser.*
2. *En déduire un développement en série entière de f.*
3. *Pour quelles valeurs de α la fonction f est-elle polynômiale?*

Solution de l'exercice: 1: La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$
On a, pour $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = -\alpha \frac{\sin(\alpha \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$
et $f''(x) = -\alpha^2 \frac{\cos(\alpha \arcsin x)}{1-x^2} - x\alpha \frac{\sin(\alpha \arcsin x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ donc la fonction f est solution de $(\mathcal{E}) : (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$.
2: La fonction f est solution de $(\mathcal{E})$ et vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
D'après le théorème de Cauchy, f est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $]-1, 1[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
Cherchons des fonctions développables en séries entières sur $]-R, R[$ avec $R > 0$, $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ solutions de $(\mathcal{E})$ et vérifiant $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.
Posons $h(x) = (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = (1-x^2)\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \alpha^2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
d'où $h(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n x^n + \alpha^2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
$h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\alpha^2 - n^2)a_n x^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} - (\alpha^2 - n^2)a_n\right)x^n$.
La fonction y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $h = 0$ soit, par unicité du DSE,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)(n+2)a_{n+2} - \left(\alpha^2 - n^2\right)a_n = 0 \text{ soit } a_{n+2} = \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+2)(n+1)}a_n : (\mathcal{C})$$

Les condtions $(\mathcal{C})$ sont équivalentes à $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k^2 - \alpha^2)}{(2p)!}$.
Vérifions que y est bien définie: on a $\left|\dfrac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n}\right| = \left|\dfrac{n^2 - \alpha^2}{(n+2)(n+1)}x^2\right| \to_{n \to +\infty} |x^2|$
donc la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$ donc $R = 1$.
On en déduit que y et f vérifient la même équation sur $]-1, 1[$ avec les mêmes conditions de Cauchy donc $y = f$.

$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ f(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_{2p}x^{2p}$ avec $a_{2p} = \dfrac{\prod\limits_{k=0}^{p-1}\left((2k)^2 - \alpha^2\right)}{(2p)!}$.

3: Les relations $(\mathcal{C})$ entraîne que $a_{2p} = 0 \Longrightarrow a_{2p+2} = 0$ donc $a_{2p_0} = 0 \Longrightarrow \forall p \geq p_0,\ a_{2p} = 0$.
On en déduit que la fonction f est polynômiale si et seulement si $\exists p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(2p_0)^2 - \alpha^2 = 0$ c'est-à-dire α **est un entier pair.**

Exercice 7 *(ccinp) Soit la suite réelle (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}a_{n-1}$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.*
2. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.*
3. *En déduire une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par la somme S de cette série entière et calculer $S(x)$.*

Solution de l'exercice:

1: Initialisation: On a $1 \leq a_n \leq n^2$ pour $n = 1$ et $n = 2$.
Hérédité: (récurrence double) Soit $n \geq 1$ vérifiant $1 \leq a_{n-1} \leq (n-1)^2$ et $1 \leq a_n \leq n^2$.
On a alors $1 \leq a_n \leq a_n + \dfrac{2}{n+1}a_{n-1} \leq n^2 + \dfrac{2(n-1)^2}{n+1} \leq n^2 + 2(n-1) \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
donc $\forall n,\ 1 \leq a_n \leq n^2$.
2: On sait que si $0 \leq b_n \leq c_n$, le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum c_n x^n$
De plus $\sum x^n$ et $\sum n^2 x^n$ ont même rayon de convergence égal à 1 (la multiplication par n ne change pas le rayon de convergence) donc le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est 1.
3: • Equa diff vérifiée par f:
Pour $n \geq 0$, $(n+2)\,a_{n+2} = (n+2)\,a_{n+1} + 2a_n$.
Si $|x| < 1$, les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ convergent et $(n+2)\,a_{n+2}x^{n+1} = (n+2)\,a_{n+1}x^{n+1} + 2a_n x^{n+1}$
On en déduit que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+2)\,a_{n+2}x^{n+1} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+2)\,a_{n+1}x^{n+1} - 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$.
On peut dériver terme à terme sur $\left]-1,1\right[$ et $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n$
donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+2)\,a_{n+2}x^{n+1} = S'(x) - a_1$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^{n+1} = xS'(x)$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = S(x) - a_0$ donc,
pour $x \in \left]-1,1\right[$ et $S'(x) - a_1 - (xS'(x) + (S(x) - a_0)) - 2xS(x) = 0$ soit $(1-x)\,S'(x) - (2x+1)\,S(x) = 0 : (E)$.
• Résolution de (E) : Posons $a(x) = \dfrac{-2x-1}{1-x} = \dfrac{-2x+2}{1-x} - \dfrac{3}{1-x} = -2 - \dfrac{3}{1-x}$ qui admet comme primitive $A(x) = -2x - 3\ln(1-x)$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \left]-1,1\right[,\ S(x) = \lambda e^{-2x}e^{-3\ln(1-x)} = \lambda\dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$.
Comme $S(0) = a_0 = 1$, $S(x) = \dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$.
Commentaire: On pourrait tirer une expression de a_n en développant l'expression obtenue (avec un produit de Cauchy).

Exercice 8 *(Mines ponts) Soit $a \in \left]0;1\right[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
Dans les question 1,2, et 3, on suppose que f dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.

1. *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Exprimer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de f.*
3. *En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.*

4. Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=f(ax)$.

Solution de l'exercice: 1: La fonction f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$
donc $x\mapsto f(ax)=f'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
Alors $x\mapsto f(ax)=f'(x)$ est aussi de classe C^n sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.
Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2: Pour $x\in\mathbb{R}$, on $f'(x)=f(ax)$ donc $f''(x)=af'(ax)=af(a^2x)$.
On continue: $f'''(x)=a\times a^2f'(a^2x)=a^{1+2}f(a^3x)$ et $f^{(4)}(x)=a^{1+2}a^3f'(a^3x)=a^{1+2+3}f(a^4x)$.
Supposons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, qu'on ait $\forall x\in\mathbb{R}, f^{(n)}(x)=a^{\frac{n(n-1)}{2}}f(a^nx)$.
En dérivant cette relation, on a $f^{(n+1)}(x)=a^{\frac{n(n-1)}{2}}\times a^nf'(a^nx)=a^{\frac{n(n+1)}{2}}f(a^{n+1}x)$.
On a montré pa récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R}, f^{(n)}(x)=a^{\frac{n(n-1)}{2}}f(a^nx)$
et comme on a $f^{(0)}(x)=f(x)=a^{\frac{0(0-1)}{2}}f(a^0x)$, la relation précédente est vraie pour $n\in\mathbb{N}$.
3: Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction, f étant continue sur le segment $[0,x]$ (ou $[x,0]$) elle y est bornée.
On pose $M=\|f\|_\infty^{[0;x]}$ et $M_{n+1}=\|f^{(n+1)}\|_\infty^{[0;x]}$
Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $\left|f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right|\leq\frac{M_{n+1}|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$ (Taylor Lagrange)
Or $f^{(n+1)}(t)=a^{\frac{n(n+1)}{2}}f(a^{n+1}t)$ et $a^nt\in[-b;b]$ si $t\in[0,x]$ car $|a|<1$, on a $\left|f^{(n+1)}(t)\right|\leqslant a^{\frac{n(n+1)}{2}}M$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}=0$ (car $\dfrac{x^n}{n!}$ est le terme général de la série exponentielle) et $\lim_{n\to+\infty}a^{\frac{n(n+1)}{2}}=0$ car $|a|<1$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right|=0$ donc $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$ **donc f est développable en série entière.**
On peut préciser ce développement car. $f^{(k)}(0)=a^{\frac{k(k-1)}{2}}f(0)$, donc
$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(0)\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k}{k!}}$.
4 D'après la question précédente si une fonction f vérife les conditions, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\lambda\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k}{k!}$. (Q1,2 et 3 forment une analyse)
Réciproquement, Si on pose $a_k=\frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k!}>0$, on a $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a^k}{k+1}$ donc, comme $0<a<1, \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=0$
Par la règle de D'Alembert, le rayon de convergence de $\sum_{k\geqslant0}a_kx^k$ est $R=+\infty$.
La fonction $x\mapsto\lambda\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k}{k!}=f(x)$ est donc définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. et par dérivation terme à terme,

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^{\frac{k(k+1)}{2}}x^k}{k!}\underset{\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k-1)}{2}+k}{=}\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}(ax)^k}{k!}=f(ax).$$

Les solutions sont donc les fonctions $x\mapsto\lambda\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k}{k!}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ quelconque.
(L'ensemble des solution est donc une droite vectorielle).