

Lundi 8 juin 2026 (fonctions de plusieurs variables)

Exercice 1 Déterminer les extrémums de $(x, y) \rightarrow y(x^2 + (\ln(y))^2)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Solution de l'exercice: Posons $f(x, y) = y(x^2 + (\ln(y))^2)$

1: Remarque.

On a $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(0, y) = +\infty$ donc f n'admet pas de maximum global.

2: application du théorème sur les points critiques.

a: La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

b: l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 : on pose $g(x, y) = y$ alors $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) > 0\}$ avec g fonction continue donc $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 .

Un extrémum local de f est donc nécessairement atteint en un point critique de f .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + (\ln(y))^2 + 2 \ln(y) \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (\ln(y) + 2) \ln(y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 1) \text{ ou } (x, y) = (0, e^{-2}).$$

2: Etude des points critiques

a: Etude du point $(0, 1)$: On a $f(0, 1) = 0$ et $f(x, y) \geq 0$ donc f admet un minimum global en $(0, 1)$.

b: Etude du point $(0, e^{-2})$:

Première méthode: Utilisation de la Hessienne:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2 \frac{\ln(y) + 1}{y} \end{pmatrix} \text{ donc } H_f(0, e^{-2}) = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^2 \end{pmatrix}.$$

On a $sp(H_f) = \left\{ 2e^2, \frac{-2}{e^2} \right\}$ donc H_f admet une valeur propre strictement négative et une valeur propre strictement positive donc n'admet pas d'extrémum local en $(0, e^{-2})$.

Autre méthode: Posons $\Delta(h, k) = f(h, e^{-2} + k) - f(0, e^{-2}) = (e^{-2} + k) \left(h^2 + (\ln(e^{-2} + k))^2 \right) - e^{-2} (\ln(e^{-2}))^2$.

On a $\Delta(h, 0) = e^{-2} \left(h^2 + (\ln(e^{-2}))^2 \right) - e^{-2} (\ln(e^{-2}))^2 = e^{-2} h^2 > 0$ si $h \neq 0$.

et $\Delta(0, k) = (e^{-2} + k) (\ln(e^{-2} + k))^2 - 4e^{-2}$.

Or $\ln(e^{-2} + k) = \ln(e^{-2}) + \ln(1 + ke^2) = -2 + ke^2 - \frac{k^2 e^4}{2} + o_{k \rightarrow 0}(k^2)$

donc $\Delta(0, k) = (e^{-2} + k) (4 - 4ke^2 + 2k^2 e^4 + o_{k \rightarrow 0}(k^2)) - 4e^{-2}$

soit $\Delta(0, k) = -2k^2 e^2 + o_{k \rightarrow 0}(k^2) < 0$ pour $h \neq 0$ suffisamment petit.

On en déduit que f n'admet pas d'extrémum local en $(0, e^{-2})$ (point selle).

Exercice 2 (ccinp): Soit φ une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^2 . Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ par

$$F(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Déterminer les fonctions φ pour lesquelles la fonction F vérifie l'équation $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0 : (\mathcal{E})$.

Solution de l'exercice: Soit $y > 0$ fixé. La fonction φ étant de classe C^2 , $x \mapsto \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ est dérivable

de dérivée $\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)}$

et $x \mapsto \frac{1}{y}\varphi' \left(\frac{x}{y} \right)$ est dérivable de dérivée $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (x, y) = \frac{1}{y^2}\varphi' \left(\frac{x}{y} \right)$. De même,

$$\frac{\partial F}{\partial y} (x, y) = -\frac{x}{y^2}\varphi' \left(\frac{x}{y} \right) \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (x, y) = \frac{2x}{y^3}\varphi' \left(\frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{y^2} \right)^2 \varphi'' \left(\frac{x}{y} \right)$$

On en déduit que $y^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (x, y) \right) = \varphi'' \left(\frac{x}{y} \right) + 2\frac{x}{y}\varphi' \left(\frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{y} \right)^2 \varphi'' \left(\frac{x}{y} \right)$ et donc que F vérifie (\mathcal{E}) si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, (1+t^2)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = 0$: (e) car lorsque (x, y) varie dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $\frac{x}{y}$ prend toutes les valeurs dans \mathbb{R} .

donc F vérifie (\mathcal{E}) si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \lambda e^{-\ln(1+t^2)} = \frac{\lambda}{1+t^2}$

et donc F vérifie (\mathcal{E}) si et seulement si $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \lambda \arctan(t) + \mu$.

Exercice 3 (Ccinp) On s'intéresse aux fonctions f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} de classe C^1 vérifiant

$$(E) : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x} (x, y) + 2x \frac{\partial f}{\partial y} (x, y) = 0.$$

Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = u^2 + v \end{cases}$ et $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$.

1. Justifier que l'application $\phi : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ est une bijection de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 et déterminer ϕ^{-1}
2. Montrer que f vérifie (E) si et seulement si $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial F}{\partial u} (u, v) = 0$.
3. Déterminer les solutions de (E) .

Solution de l'exercice:

1 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $\phi(u, v) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = u^2 + v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v = y - x^2 \end{cases}$,

ce qui assure la bijectivité de ϕ et $\phi^{-1}(x, y) = (x, y - x^2)$.

2: Les fonctions $(u, v) \mapsto x(u, v)$ et $(u, v) \mapsto y(u, v)$ sont de classe C^1 donc si f est de classe C^1 alors F est de classe C^1 et (règle de la chaîne)

on a $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + 2u \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + 2x \frac{\partial f}{\partial y}$ donc $\frac{\partial f}{\partial x} (x, y) + 2x \frac{\partial f}{\partial y} (x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial u} (u, v) = 0$.

3: Or $\frac{\partial F}{\partial u} (u, v) = 0$ si et seulement si il existe une fonction C de classe C^1 telle que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, F(u, v) = C(v)$.

Or $F = f \circ \phi \Leftrightarrow f = F \circ \phi^{-1}$ donc

donc f vérifie (E) si et seulement si il existe une fonction C de classe C^1 telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = C(y - x^2)$.

Exercice 4 (Navale 2018) Soit S la surface d'équation $x^2 - y^2 - z = 1$ et P le plan d'équation $x + 2y - z = 0$. Déterminer l'ensemble des points M de S tels que le plan tangent à S en M soit parallèle à P .

Solution de l'exercice: 1: Le plan tangent à S d'équation $f(x, y, z) = 0$ en un point régulier est normal au gradient de f .

Ici, $\nabla(f)(x, y, z) = \text{grad}(f)(x, y, z) = (2x, 2y, -1) \neq 0$ donc tout point est régulier.

Un vecteur normal à P est $\vec{n} = (1, 2, -1)$.

Le plan tangent à S en $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ est parallèle à P si et seulement si \vec{n} et $\text{grad}(f)(M_0)$ sont colinéaires c'est-à-dire ssi $\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = 1 \end{cases}$.

Or $M_0 \in S$ donc $z = x_0^2 - y_0^2 - 1 = -\frac{7}{4}$ d'où $M = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{7}{4})$ est l'unique point solution du problème.

2: Soit π_{M_0} le plan tangent à (S) en M_0 et $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

On a $M \in \pi_{M_0} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \nabla(f)(x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M} | \nabla_2(f)(x_0, y_0, z_0)) = 0$

Exercice 5 (ccinp 2018) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^3$

1. Montrer que f admet un point critique mais n'y atteint pas d'extremum local.
2. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Justifier que D est une partie fermée de \mathbb{R}^2 .
3. Montrer qu'il existe (x_0, y_0) et (x_1, y_1) appartenant à D tel que $\forall (x, y) \in D, f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$.
Donner la valeur de $f(x_0, y_0)$ et $f(x_1, y_1)$. (on pourra considérer $\varphi : t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$).

Solution de l'exercice:

1: La fonction f est définie et de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 donc si f admet un extremum en (x, y) alors (x, y) est un point critique de f .

On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$. On a donc $\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)}$.

Remarque: le passage par la hessienne ne permet pas de conclure car $0 \in sp(H_f(0, 0))$

Or $f(x, y) = x^2(y + 1) + y^3$ donc $f(0, y) - f(0, 0) = y^3$ qui change de signe en $y = 0$ donc f n'admet pas d'extrémum local en $(0, 0)$.

2: L'ensemble D est fermé car $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, h(x, y) \leq 0\}$ avec $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ qui est continue.

3 Soit g la restriction de f à D .

- L'ensemble D est borné.(c'est la boule unité pour la norme usuelle) et fermé et g est continue donc g admet un maximum et un minimum, ce qui répond à la première partie de la question.

- Posons $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, h(x, y) < 0\}$.

a: recherche des extrémum locaux dans O :

L'ensemble O est ouvert car h est continue donc, g admet un extremum local en $(x, y) \in O$ alors (x, y) est un point critique. La première question entraîne que f n'admet pas d'extremum local dans O .

On en déduit que le maximum et le minimum de g sont atteint sur $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

b Recherche des extrémum sur C .

Soit $(x, y) \in C$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$.

On a $g(x, y) = x^2 + y(x^2 + y^2) = x^2 + y = \cos^2(t) + \sin(t) = \varphi(t)$.

On a $\varphi'(t) = -2\sin(t)\cos(t) + \cos(t) = \cos(t)(1 - 2\sin(t))$

On en déduit les variations de φ :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\varphi(t)$			↗		↘		↗		↘		↗

Or $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \varphi\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$ donc le maximum de φ , donc de f est $\frac{5}{4}$ et est atteint en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

De même, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ donc le minimum de f est -1 et est atteint en $(0, -1)$.

Exercice 6 (Mines Psi 2015) Soit H la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $H(x, y) = \frac{x^4y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $H(0, 0) = 0$.

Montrer que la fonction H est continue sur \mathbb{R}^2 . Est-elle de classe C^1 ?

Solution de l'exercice 1: Continuité:

- Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues donc la fonction H est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ d'après les théorèmes sur les opérations sur fonctions continues.

- De plus, si $x \neq 0$ alors $|H(x, y)| \leq \frac{|x^4y|}{x^4} = |y|$ et cette inégalité est aussi valable pour $x = 0$.

donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} H(x, y) = 0$ donc H est continue en 0.

2 Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe C^1 donc la fonction H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ d'après les théorèmes sur les opérations sur fonctions de classe C^1 .

On a $\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = 4 \frac{x^3 y^3}{(x^4 + y^2)^2}$ et $\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = x^4 \frac{x^4 - y^2}{(x^4 + y^2)^2}$.

3 Existence de dérivées partielles en $(0, 0)$:

Si $x \neq 0$, $\frac{H(x, 0) - H(0, 0)}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x, 0) - H(0, 0)}{x}$ donc $x \mapsto H(x, 0)$ est dérivable en 0

de dérivée $\boxed{\frac{\partial H}{\partial x}(0, 0) = 0}$. De même $\boxed{\frac{\partial H}{\partial y}(0, 0) = 0}$.

Montrons que la fonction $\frac{\partial H}{\partial y}$ n'est pas continue en 0.

On a $\frac{\partial H}{\partial y}(x, 0) = x^4 \frac{x^4}{x^8} = 1$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial H}{\partial y}(x, 0) = 1 \neq \frac{\partial H}{\partial y}(0, 0)$.

On en déduit que $\frac{\partial H}{\partial y}$ n'est pas continue en 0 donc que H n'est pas de classe C^1 .

Exercice 7 (CCINP PSI 21) On cherche une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue vérifiant la condition:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt : (E)$$

1. Résoudre, suivant la valeur du réel c l'équation $y'' - cy = 0$.

2. Soit f une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^1 . Soit $F : (x, y) \mapsto \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt$. Montrer que F est de classe C^2 et préciser $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

3. Soit f une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue vérifiant (E).

Déterminer $f(0)$.

Justifier que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} et calculer $f''(x) f(y) - f(x) f''(y)$.

En déduire les solutions de (E).

Solution de l'exercice:

1: Les solutions sont les fonctions

$$x \mapsto \begin{cases} \lambda + \mu x & \text{si } c = 0 \\ \lambda \cosh(\sqrt{c}x) + \mu \sinh(\sqrt{c}x) & \text{si } c > 0 : (*) \\ \lambda \cos(\sqrt{-c}x) + \mu \sin(\sqrt{-c}x) & \text{si } c < 0 \end{cases}$$

où λ et μ sont des réels quelconques.

(*) on préfère écrire les solutions avec ch et sh plutôt qu'avec des exponentielles pour une raison qui apparaîtra dans Q3 (synthèse)

2: Soit u une primitive de f . On a $F(x, y) = u(x+y) - u(x-y)$. La fonction f est C^1 donc g est C^2 donc F est C^2 et

$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = g'(x+y) - g'(x-y) = f(x+y) - f(x-y)$. On en déduit que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f'(x+y) - f'(x-y).$$

De même $\frac{\partial F}{\partial y} = f(x+y) + f(x-y)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f'(x+y) - f'(x-y)$ donc $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

3: • En prenant $x = y = 0$ dans (E), on obtient $\boxed{f(0) = 0}$.

• Si f est la fonction nulle, alors f est de classe C^2 .

• On suppose que f n'est pas la fonction nulle: Montrons que f est de classe C^2 :

Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) \neq 0$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{f(y)} \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt$.

Soit u une primitive de f . On a $\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = u(x+y) - u(x-y)$

donc $x \mapsto \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt$ est dérivable de dérivée $x \mapsto u'(x+y) - u'(x-y) = f(x+y) - f(x-y)$ qui est continue

donc f est de classe C^1 et $f'(x) = \frac{1}{f(y)} (f(x+y) - f(x-y))$ donc f' est de classe C^1 **donc f est de classe C^2 .**

• L'égalité $F(x, y) = f(x) f(y)$ entraîne que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f''(x) f(y) - f(x) f''(y)$. On déduit de Q2 que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x) f(y) - f(x) f''(y) = 0 : (E').$$

• La fonction nulle est solution de (E) .

Supposons $f \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) \neq 0$. Posons $c = \frac{f''(y)}{f(y)}$. On déduit de (E') que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - cf(x) = 0$$

En utilisant Q1 et le fait que $f(0) = 0$, on obtient (suivant la valeur de c) les fonctions de la forme $f = x \mapsto \mu x$ ou $f : x \mapsto \mu \sin(\alpha x)$ ou $f : x \mapsto \mu \sinh(\alpha x)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ quelconques (on a posé $\alpha = \sqrt{-c}$ si $c < 0$ ou $\alpha = \sqrt{c}$ si $c > 0$).

Synthèse:

$f = 0$ est solution. Dans la suite, on suppose $f \neq 0$ donc $\mu \neq 0$ et $\alpha > 0$.

Premier cas: $c = 0$: on a $f(x) = \mu x$ donc $f(x) f(y) = \mu^2 xy$ et $\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \mu \left(\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x-y)^2}{2} \right) = 2\mu xy$

donc f est solution si et seulement si $\mu^2 = 2\mu$ soit $\mu = 2$.

Deuxième cas: $c > 0$: on a $f(x) = \mu \sin(\alpha x)$

donc $f(x) f(y) = \mu^2 \sin(\alpha x) \sin(\alpha y) = \frac{\mu^2}{2} (\cos(\alpha(x-y)) - \cos(\alpha(x+y)))$

et $\int_{x-y}^{x+y} \mu \sin(\alpha x) dt = \frac{\mu}{\alpha} (-\cos(\alpha(x+y)) + \cos(\alpha(x-y)))$.

donc f est solution si et seulement si $\frac{\mu^2}{2} = \frac{\mu}{\alpha}$ soit $\mu = \frac{2}{\alpha}$.

Troisième cas: $c < 0$: on a $f(x) = \mu \sinh(\alpha x)$

on a $f(x) f(y) = \mu^2 \sinh(\alpha x) \sinh(\alpha y) = \frac{\mu^2}{2} (\cosh(\alpha(x+y)) - \cosh(\alpha(x-y)))$ car

$$\sinh(a) \sinh(b) = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2} = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{4} - \frac{e^{a-b} + e^{-a+b}}{4} = \frac{1}{2} (\cosh(a+b) - \cosh(a-b))$$

et $\int_{x-y}^{x+y} \mu \sinh(\alpha x) dt = \frac{\mu}{\alpha} (\cosh(\alpha(x+y)) - \cosh(\alpha(x-y)))$

donc f est solution si et seulement si $\frac{\mu^2}{2} = \frac{\mu}{\alpha}$ soit $\mu = \frac{2}{\alpha}$.

Conclusion: Les solutions sont la fonction nulle, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto \frac{2}{\alpha} \sin(\alpha x)$, $x \mapsto \frac{2}{\alpha} \sinh(\alpha x)$ avec $\alpha > 0$ quelconque.

Exercice 8 (Mines télécom) Soit f la fonction définie, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par

$$f(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f .

2. Montrer que f est de classe C^1 sur D et calculer ses dérivées partielles.

3. Déterminer la valeur de f .

Solution de l'exercice:

1. On a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \neq 1\}$ (faire une figure). On remarque (admis) que D est la réunion de 3 ouverts convexes disjoints $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ et } y > \frac{1}{x}\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0 \text{ et } y < \frac{1}{x}\}$ et $D_3 = D \setminus (D_1 \cup D_2)$.

2. Les théorèmes sur les opérations sur les fonctions de classe C^1 entraînent que f est bien de classe C^1 sur D et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \times \frac{1-xy-y(x+y)}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}$ or

$$(1-xy)^2+(x+y)^2 = x^2y^2+x^2+y^2+1 = (y^2+1)(x^2+1) \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0. \text{ On a de même } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

3. Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. L'ensemble D_i est un ouvert (défini par inégalités stricts) et D_1 et D_2 sont convexes (voir exercice dont l'énoncé est en fin de feuille). et $\nabla(f) = 0$ donc f est constante sur D_1 et sur D_2 .

- Si $x > 1$, $(x, x) \in D_1$, $f(x, x) = 2 \arctan(x) - \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pi$ donc $\forall (x, y) \in D_1, f(x, y) = \pi$.

- De même $\forall (x, y) \in D_2, f(x, y) = -\pi$.

- Pour D_3 , il y a une difficulté supplémentaire car D_3 n'est pas convexe.

Par contre, si $(x, y) \in D_3$ alors

- le segment $[(x, 0), (x, y)]$ est compris dans D_3 et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ donc $f(x, y) = f(x, 0)$

- le segment $[(x, 0), (0, 0)]$ est compris dans D_3 et $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ donc $f(x, 0) = f(0, 0)$ donc $f(x, y) = f(0, 0)$

$f(a) = f((0, 0))$ $f(a) = f((0, 0))$ $f(a) = f((0, 0))$ et en adaptant la démonstration du cours, on montre que $f(a) = f((0, 0))$ donc f est constante sur D_3 .

Or $f(0, 0) = 0$ donc $\forall (x, y) \in D_3, f(x, y) = 0$ (soit $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$).

Exercice 9 (centrale) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x \sin(y) - y \sin(x)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?

2. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$? Si oui, les calculer.

4. La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Solution de l'exercice:

1: La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (th opérations).

Utilisons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en $a = 0$: $|\sin(x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$.

$$\text{On a } |f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x \sin(y) - y \sin(x)}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{(x \sin(y) - xy) - (y \sin(x) - xy)}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x(\sin(y) - y) - y(\sin(x) - x)}{x^2 + y^2} \right|$$

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq \left| \frac{x(\sin(y) - y)}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y(\sin(x) - x)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x| \frac{y^2}{2}}{x^2 + y^2} + \frac{|y| \frac{x^2}{2}}{x^2 + y^2} = \frac{|x| + |y|}{2}.$$

La fonction $(x, y) \mapsto \frac{|x| + |y|}{2}$ est continue de limite 0 en $(0, 0)$ donc $\lim_{(x, y) \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, 0)$ donc f est continue en $(0, 0)$.

2: Si $(x, y) \neq (0, 0)$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\sin y - y \cos x}{x^2 + y^2} - 2x \frac{x \sin y - y \sin x}{(x^2 + y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\sin x - x \cos y}{x^2 + y^2} - 2y \frac{x \sin y - y \sin x}{(x^2 + y^2)^2}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (th opérations) donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

3: On a $f(x, 0) = 0$ donc $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

4: On a $\sin y = y + O_{y \rightarrow 0}(y^3)$ et $\cos x = 1 + O_{x \rightarrow 0}(x^2)$. On en déduit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\sin y - y \cos x}{x^2 + y^2} - 2x \frac{x \sin y - y \sin x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y + O_{y \rightarrow 0}(y^3) - y(1 + O_{x \rightarrow 0}(x^2))}{x^2 + y^2} - 2x \frac{x(y + O_{y \rightarrow 0}(y^3)) - y(x + O_{y \rightarrow 0}(x^3))}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{O_{y \rightarrow 0}(y^3) - y O_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x^2 + y^2} - 2x \frac{x O_{y \rightarrow 0}(y^3) - y O_{y \rightarrow 0}(x^3)}{(x^2 + y^2)^2} \rightarrow_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

(par exemple, si $x \times y \neq 0$, $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \geq 2x^2y^2 > 0$ donc

$$\left| \frac{x^2 O_{y \rightarrow 0}(y^3)}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq \frac{x^2 O_{y \rightarrow 0}(y^3)}{2x^2y^2} = O_{y \rightarrow 0}(y) \rightarrow_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 \text{ et les autres termes s'étudient de la même manière).}$$

On en déduit que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$ donc sur \mathbb{R}^2 .

De même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ donc f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 10 Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On pose $C = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y > f(x)\}$. Montrer que C est convexe.

Solution de l'exercice: Soit (a, b) et (a', b') des éléments de C et $t \in [0, 1]$. Montrons que $t(a, b) + (1 - t)(a', b') \in C$.

On a $t(a, b) + (1 - t)(a', b') = (ta + (1 - t)a', tb + (1 - t)b')$.

Or $tb + (1 - t)b' \geq tf(a) + (1 - t)f(a') \geq f(ta + (1 - t)a')$ car (a, b) et (a', b') sont dans C et f est convexe.

On a donc bien $t(a, b) + (1 - t)(a', b') \in C$.

Remarque: Un exercice classique porte sur l'équivalence:

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On pose $C = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$.

Montrer que f est convexe si et seulement si C est convexe.