

Mardi 9 juin 2026

Exercice 1 On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés de 1 à 3.

On effectue des tirages indépendants avec remise d'un seul jeton à la fois. On note :

- Y le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois dans l'ensemble des tirages réalisés deux numéros différents.

- Z le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois les trois numéros.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Identifier la loi de $Y - 1$.
3. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
4. Déterminer la loi du couple (Y, Z) .
5. En déduire la loi de Z ainsi que $\mathbb{E}(Z)$.

Solution de l'exercice: 1: On a $Y(\Omega) \subset (\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}) \setminus \{1\}$ par construction.

Pour $k \geq 2$, en notant N_i le numéro du jeton obtenu au tirage i , on a $(Y = k) = \bigcup_{1 \leq a \leq 3} (N_1 = a, \dots, N_{k-1} = a, N_k \neq a)$

Ces évènements étant incompatibles et que les N_i sont indépendantes par hypothèse et suivent toutes la loi uniforme sur $[[1; 3]]$, $\mathbb{P}(Y = k) = 3 \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(N_i = a) \right) \mathbb{P}(N_k \neq a) = \frac{6}{3^k}$.

On a $(Y \neq +\infty) = \bigcup_{k=2}^{+\infty} (Y = k)$ (union disjointe) donc $\mathbb{P}(Y \neq +\infty) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{6}{3^k} = \frac{6}{9} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^{k-2}} = \frac{6}{9} \times \frac{1}{1-(1/3)} = 1$.

On en conclut que $\mathbb{P}(Y = +\infty) = 0$ (il est presque sûr d'arriver à avoir deux numéros différents).

2: D'après la question précédente, $(Y - 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y - 1 = k) = \frac{6}{3^{k+1}} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ donc $Y - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

3: D'après le cours, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y - 1) + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ et $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(Y - 1) = \frac{1-(2/3)}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}$.

4 On a si $2 \leq k < n$,

$(Y = k, Z = n) = \bigcup_{1 \leq a, b, c \leq 3 \text{ et } a, b, c \text{ deux à deux distincts}} (N_1 = a, \dots, N_{k-1} = a, N_k = b, N_{k+1} \neq c, \dots, N_{n-1} \neq c, N_n = c)$

Il y a $3! = 6$ choix de (a, b, c) donc $P(Y = k, Z = n) = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1} = \frac{2^{n-k}}{3^{n-1}}$

5 Par construction, $Z(\Omega) \subset (\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}) \setminus \{1, 2\}$. Pour $n \geq 3, (Z = n) = \bigcup_{m=2}^{n-1} (Y = m, Z = n)$ (réunion incompatible)

donc $\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{m=2}^{n-1} \frac{2^{n-m}}{3^{n-1}} = \sum_{m=2}^{n-1} \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} \frac{1}{2^{m-2}} = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} \times \frac{1-(1/2)^{n-2}}{1-(1/2)} = \frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$.

On en déduit que $(Z \neq +\infty) = \bigcup_{n=3}^{+\infty} (Z = n)$ donc $\mathbb{P}(Z \neq +\infty) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} = \frac{4}{9} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^{n-3}}{3^{n-3}} - \frac{2}{9} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-3}}$

On a donc $\mathbb{P}(Z \neq +\infty) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{1-(2/3)} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{1-(1/3)} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$ donc $\mathbb{P}(Z = +\infty) = 0$ (il est presque sûr d'arriver à avoir les trois numéros).

$\sum_{n=3}^{+\infty} n\mathbb{P}(Z = n)$ converge car, par croissances comparées, $n\mathbb{P}(Z = n) = n \frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} = 0 \left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, $\mathbb{E}(Z) =$

$\sum_{n=3}^{+\infty} n\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{n=3}^{+\infty} n \frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$.

Or, pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=3}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2$ donc en dérivant la série entière terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence,

on a $\sum_{n=3}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - 1 - 2x$.

On a $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=3}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 \sum_{n=3}^{+\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, donc $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{(1-(2/3))^2} - 1 - 2(2/3) - 2 \left(\frac{1}{(1-(1/3))^2} - 1 - 2(1/3) \right) = \frac{11}{2}$.

Exercice 2 (ccinp) On pose, pour x réel et $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = x^n \sin(\pi x)$ et $\mathcal{I}_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.

1. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0, 1]$ et préciser la somme

2. Montrer la convergence de $I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} dx$

3. Montrer que la série $\sum I_n$ converge et montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Solution de l'exercice:

1: • si $0 \leq x < 1$ alors $u_n(x) = \sin(\pi x) \times x^n$ qui est géométrique de raison x donc $\sum u_n(x)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-x}.$$

• si $x = 1$ alors $u_n(1) = 0$ donc $\sum u_n(1)$ converge et $\sum u_n(1) = 0$.

2: L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} dx$ est convergente:

Soit $f : x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$ est continue sur $[0, 1[$ et $f(1+h) = \frac{\sin(\pi + \pi h)}{-h} = \frac{-\sin(\pi h)}{-h} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{-\pi h}{-h} = \pi$ donc la

fonction $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$ est prolongeable par continuité en $x = 1$.

3: • Premier essai: convergence normale: Pas évident $|u_n(x)| \leq x^n \leq 1$ ne marche pas.

• Deuxième essai: convergence de $\sum \int_0^1 |u_n(x)| dx$: Pas évident $\int_0^1 |u_n(x)| dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ ne marche pas.

• Troisième essai: on essaye d'intervertir en passant par les suites de fonctions et le théorème de convergence dominée:

Pour $x \in [0, 1[$, posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$ et $S(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$.

(H₁) Les fonctions S_n et S sont continues donc CPM sur $[0, 1[$.

(H₂) La suite de fonctions (S_n) converge simplement vers S sur $[0, 1[$.

(H₃) On a $S_n(x) = \sin(\pi x) \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Or $\sin(\pi x) = \sin(\pi - \pi x)$ et $\forall \mathcal{I} \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq |u|$ donc $|\sin(\pi - \pi x)| \leq \pi |1-x|$.

On en déduit que $|S_n(x)| \leq \pi |1-x^{n+1}| \leq \pi$ car $x \in [0, 1[$.

La fonction $\varphi : x \mapsto \pi$ est continue sur $[0, 1]$ donc intégrable sur $[0, 1[$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 S(x) dx$

Or, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 S_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 u_k(x) dx =$ donc la série $\sum_{k=0}^n I_k$ converge et a pour somme

$\int_0^1 S(x) dx$.

On a donc $\sum_{k=0}^{\infty} I_k = \int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} dx = \int_0^1 \frac{\sin(\pi(1-x))}{1-x} dx$

Or $\int_0^1 \frac{\sin(\pi(1-x))}{1-x} dx = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t} dt$ par le changement de variable C^1 et bijectif $x \mapsto 1-x$

et en posant $u = \pi t$, on a $\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t} dt = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u} du$, ce qui donne le résultat demandé.

Exercice 3 (mines télécom) Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) et A et B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre p . Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation différentielle $(E_\omega) : y'' + (A(\omega) - 1)y' + B(\omega)y = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Solution de l'exercice: On a $A(\Omega) = B(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc A et B sont supérieures ou égales à 1.

Soit r_1 et r_2 les racines complexes (comptées avec multiplicité) de l'équation caractéristique $(eq) : r^2 + (A(\omega) - 1)r + B(\omega) = 0$.

On a $X^2 + (A(\omega) - 1)X + B(\omega) = (X - r_1)(X - r_2)$ donc $r_1 r_2 = B > 0$ donc r_1 et r_2 sont non nulles et de même signe.

De et $r_1 + r_2 = 1 - A \leq 0$.

• Si $\Delta > 0$, on a $r_1 r_2 = B > 0$ donc r_1 et r_2 sont non nulles et de même signe et $r_1 + r_2 = 1 - A \leq 0$ donc $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$

Les solutions sont $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ de limite 0 en $+\infty$.

• Si $\Delta = 0$, on a donc $r < 0$.

Les solutions sont $x \mapsto e^{rx} (\lambda + \mu x)$ de limite 0 en $+\infty$ par croissance comparée.

• Si $\Delta < 0$. Posons $r_1 = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $a = \operatorname{Re}(r_i) = \frac{1 - A}{2}$.

Les solutions sont $x \mapsto e^{ax} (\lambda \cos(bx) + \mu \sin(bx))$.

- Si $a < 0$ (c'est-à-dire $A > 1$) alors les solutions sont de limite 0 en $+\infty$.

- Si $a \geq 0$ (c'est-à-dire $A = 1$) donc $a = 0$, en prenant $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ et $f : x \mapsto \cos(bx)$ vérifie $f\left(\frac{2n\pi}{b}\right) = 1 \not\rightarrow 0$ donc les solutions ne tendent pas toutes vers 0 en $+\infty$.

Conclusion: La condition n'est pas vérifiée si et seulement si $(\Delta < 0) \cap (A = 1)$.

L'événement cherché C est donc $C = \overline{(\Delta < 0) \cap (A = 1)}$.

Or $\Delta(\omega) = (A(\omega) - 1)^2 - 4B(\omega)$ donc $(A = 1) \Rightarrow (\Delta < 0)$. On en déduit que $C = \overline{(A = 1)}$.

Or $P(A = 1) = p$ donc $P(C) = 1 - p$.

Exercice 4 On pose $u_n(x) = \frac{1}{(1 + nx)^2}$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Montrer que S est définie et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Solution de l'exercice: Soit $a > 0$.

Appliquons le théorème de dérivation terme à terme version C^∞ sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

$(H_1) : \forall n \in \mathbb{N}$, u_n est C^∞ sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

$(H_2) : \text{On a } u_n(x) = \frac{1}{(1 + nx)^2} = (1 + nx)^{-2}$ donc $u'_n(x) = -2n(1 + nx)^{-3}$.

Par récurrence immédiate, $u_n^{(k)}(x) = (-1)^k (k + 1)! n^k (1 + nx)^{-(k+2)} = \frac{(-1)^k (k + 1)! n^k}{(1 + nx)^{k+2}}$

Or si $x \geq a$ alors $\left| u_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{(k + 1)! n^k}{(1 + na)^{k+2}} \leq (k + 1)! \frac{n^k}{(1 + na)^{k+2}}$.

Donc $\|u_n\|_\infty^{[a, +\infty[} \leq (k + 1)! \frac{n^k}{(1 + na)^{k+2}} \leq \frac{(k + 1)!}{a^{k+2} n^2}$ donc par comparaison de SATP, $\sum \|u_n\|_\infty^{[a, +\infty[}$ converge.

On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ quelconque donc S est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

(la convergence uniforme entraînant la convergence simple, inutile de reprendre la convergence simple)

Exercice 5 (Mines ponts)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que F est fermé.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\exp_p(A) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k$. Montrer que la suite $(\exp_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge (on note $\exp(A)$ la limite).

3. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A .

4. Existe-t-il un polynôme P tel que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(A) = P(A)$?

Solution de l'exercice

1: Soit (x_n) une suite de F qui converge vers x . Montrons que $x \in F$.

Le sous-espace F admet un supplémentaire G dans E .

Soit p la projection sur F parallèlement à G .

Première méthode: On a $p(x_n) = x_n$ et l'application linéaire p est continue car E est de dimension finie. On en déduit que $p(x) = x$ donc que $x \in F$.

Deuxième méthode: On a

2: Posons $A^k = (a_{i,j}(k))$, $m = \max |a_{i,j}|$ et $m_k = \max |a_{i,j}(k)|$.

On a $|a_{i,j}(k)| = \left| \sum_{l=1}^n a_{i,l} a_{l,j}(k-1) \right| \leq \sum_{l=1}^n |a_{i,l} a_{l,j}(k-1)| \leq n \times m \times m_k$. On en déduit par récurrence que $m_k \leq n^{k-1} m$.

Posons $\exp_p(A) = (m_{i,j}(p))$. On veut montrer que pour tout (i, j) , la suite $(m_{i,j}(p))_p$ converge.

On remarque que $m_{i,j}(p) = \sum_{k=0}^p \frac{a_{i,j}(k)}{k!}$. Il suffit donc de montrer que la série $\sum \frac{a_{i,j}(k)}{k!}$ converge.

Or $\left| \frac{a_{i,j}(k)}{k!} \right| \leq \frac{n^{k-1} m^k}{k!} = \frac{1}{n} \frac{(nm)^k}{k!}$ et $\sum \frac{(nm)^k}{k!}$ converge (série exponentielle) donc la série $\sum \frac{a_{i,j}(k)}{k!}$ converge absolument.

On en déduit que la suite $(\exp_p(A))_p$ converge.

3: L'ensemble $F = \text{vect}(A^k, k \in \mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie donc F est fermé.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\exp_p(A) \in F$ donc $\exp(A) \in F$ donc $\exp(A)$ est un polynôme en A .

4: Supposons qu'il existe P polynôme tel que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A) = P(A)$.

Si $A = \lambda I_n$ alors $A^k = \lambda^k I_n$ donc $\exp_p(A) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \lambda^k I_n = \left(\sum_{k=0}^p \frac{\lambda^k}{k!} \right) I_n \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} e^\lambda I_n = \text{diag}(e^\lambda, \dots, e^\lambda)$ et

$P(A) = \text{diag}(P(\lambda), \dots, P(\lambda))$.

On a donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = e^\lambda$, ce qui contredit le fait que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{P(\lambda)}{e^\lambda} = 0$ (par croissance comparée).

Il n'existe donc pas de polynôme P tel que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A) = P(A)$.

Exercice 6 (Mines ponts)

Soit $E = C^\infty([0; 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $T(f) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$.

1. Montrer que T définit un endomorphisme de E .

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0; 1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.

3. Déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(0)$.

4. Trouver de même, pour $x \in [0; 1]$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(x)$.

Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(T^n(f))$.

5. Montrer que 1 est valeur propre de T et déterminer $E_1(T)$.

6. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que k peut être valeur propre de T ?

7. Pour $f \in E$, calculer $(T(f))'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$

Solution de l'exercice:

1: • Si $f \in E$, par opérations, comme $x \mapsto \frac{x}{2}$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ sont de classe C^∞ de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$, la fonction $T(f)$ est bien définie et de classe C^∞ sur $[0; 1]$ donc $T(f) \in E$.

• Soit $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in [0; 1]$ on a $T(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{2} \left((\lambda f + g)\left(\frac{x}{2}\right) + (\lambda f + g)\left(\frac{x+1}{2}\right) \right) =$

$\frac{\lambda}{2} (f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})) + \frac{1}{2} (g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2}))$ ce qui donne $T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$ donc $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$: T est un endomorphisme de E .

2: Pour $f \in E$ et $x \in [0, 1]$, $T^2(f)(x) = T(T(f))(x) = \frac{1}{2} (T(f)(\frac{x}{2}) + T(f)(\frac{x+1}{2}))$ et, par définition de $T(f)$, on a $T^2(f)(x) = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} (f(\frac{x}{4}) + f(\frac{x+1}{4})) + \frac{1}{2} (f(\frac{x+2}{4}) + f(\frac{x+3}{4}))) = \frac{1}{4} (f(\frac{x}{4}) + f(\frac{x+1}{4}) + f(\frac{x+2}{4}) + f(\frac{x+3}{4}))$.

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1, \forall f \in E, \forall x \in [0, 1], T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(\frac{x+k}{2^n})$.

• Déjà vu pour $n = 1$ et $n = 2$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que $\forall x \in [0, 1], T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(\frac{x+k}{2^n})$. Par définition, comme $T^{n+1} = T^n \circ T$, on

obtient $T^{n+1}(f)(x) = T^n(T(f))(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} T(f)(\frac{x+k}{2^n})$ par hypothèse de récurrence puis en utilisant la définition de T ,

$$\text{on a } T^{n+1}(f)(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} (f(\frac{x+k}{2^{n+1}}) + f(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}})) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f(\frac{x+k}{2^{n+1}}) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}).$$

En posant $j = k + 2^n$ dans la seconde somme, on a $\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} f(\frac{x+j}{2^{n+1}})$ donc, en changeant j en k et

en regroupant les deux sommes, on arrive bien à $T^{n+1}(f)(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f(\frac{x+k}{2^{n+1}})$.

Par principe de récurrence, $\forall f \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(\frac{x+k}{2^n})$, cette formule étant même valable quand $n = 0$ car $T^0(f)(x) = f(x) = \frac{1}{2^0} \sum_{k=0}^{2^0-1} f(\frac{x+k}{2^0})$ puisque $T^0 = \text{id}_E$.

3: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de Riemann $R_n(f) = \frac{1-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(0 + k \frac{1-0}{n})$ associée à $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

D'après un théorème du cours, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t) dt$. D'après Q2., $T^n(f)(0) = R_{2^n}(f)$. Comme $(R_{2^n}(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(R_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(0) = \int_0^1 f(t) dt$.

4: • Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $T^n(f)(x) - T^n(f)(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} (f(\frac{x+k}{2^n}) - f(\frac{k}{2^n}))$ donc, par inégalité triangulaire,

$|T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} |f(\frac{x+k}{2^n}) - f(\frac{k}{2^n})|$. Or, par inégalité des accroissements finis, en posant

$M = \|f'\|_{\infty, [0, 1]}$ qui existe puisque la fonction f' est continue sur le segment $[0, 1]$ d'après le théorème des bornes atteintes, on a $|f(\frac{x+k}{2^n}) - f(\frac{k}{2^n})| \leq \frac{Mx}{2^n}$. Ainsi, $|T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| \leq \frac{2^n Mx}{2^{2n}} \leq \frac{M}{2^n}$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (T^n(f)(x) - T^n(f)(0)) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(x) = \int_0^1 f(t) dt$.

• On peut donc affirmer que la suite de fonctions $(T^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante $c : x \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ sur $[0, 1]$.

Etudions la convergence uniforme:

On a $|T^n(f)(x) - c(x)| = |T^n(f)(x) - T^n(f)(0) + T^n(f)(0) - c(x)| \leq |T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| + |T^n(f)(0) - c(x)|$ donc $|T^n(f)(x) - c(x)| \leq \frac{M}{2^n} + \left| T^n(f)(0) - \int_0^1 f(t) dt \right|$. Ainsi,

$\|T^n(f) - c\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{M}{2^n} + \left| T^n(f)(0) - \int_0^1 f(t) dt \right|$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{M}{2^n} + \left| T^n(f)(0) - \int_0^1 f(t) dt \right| \right) = 0$ donc $(T^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers c sur $[0, 1]$.

5. • Si 1 est la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]$, $T(1) = 1$ donc, comme $1 \neq 0$, 1 est valeur propre de T .

• Soit $f \in E_1(T)$, alors $T(f) = f$ donc, par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N}, T^n(f) = f$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(x) = \int_0^1 f(t) dt$ ce qui prouve que f est constante.

On a donc $E_1(T) = \text{Vect}(1)$.

6 Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$. Supposons qu'il existe $f \in E$ telle que $T(f) = kf$.

Par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, T^n(f) = k^n f$. Soit $x \in [0, 1]$.

Or d'après Q4 la suite $(T^n(f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et la suite $(k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, ceci impose que $f(x) = 0$.

On a donc $f = 0$. On en déduit que k n'est pas valeur propre de f .

Remarque: Par le même argument, comme $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, on en déduit aussi que -1 n'est pas valeur propre de T .

7. • Soit $f \in E$. La fonction f est dérivable donc $T(f)$ est dérivable et on a $T(f)'(x) = \frac{1}{4} (f'(\frac{x}{2}) + f'(\frac{x+1}{2})) = \frac{T(f')(x)}{2}$.

On a donc $T(f)' = \frac{T(f')}{2}$.

• Si $\frac{1}{2}$ est valeur propre de T et $f \in E_{1/2}(T)$, alors $T(f) = \frac{f}{2}$ donc $\frac{f'}{2} = T(f)' = \frac{T(f')}{2}$ et $T(f') = f'$ donc $f' \in E_1(T)$ donc f' est constante. Ainsi, f est une fonction affine.

• Réciproquement, si on pose $f : x \mapsto ax + b$, alors $f \in E$

$$\text{et } \forall x \in [0; 1], \begin{cases} T(f)(x) = \frac{1}{2} (a\frac{x}{2} + b + a\frac{x+1}{2} + b) = \frac{ax}{2} + (\frac{a}{4} + b) \\ \frac{f(x)}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{b}{2} \end{cases}$$

$T(f) = \frac{f}{2}$ si et seulement si $a + 2b = 0$ soit $f(x) = b(1 - 2x)$.

On en déduit que $E_{1/2}(T) = \text{Vect}(g)$ avec $g : x \mapsto 1 - 2x$ et $\frac{1}{2} \in Sp(T)$.