TD 3 centrale 2 énoncés complets

Exercice 1 *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.*

1. *Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$tel que $A_n(x) = y$. On note $f_n(y)$ cette unique solution.*

2. *Ecrire une fonction Python qui prend en argument n et x et qui renvoie $A_n(x)$.*

3. *Utiliser la fonction fsolve pour obtenir $f_n(y)$.*

4. *Tracer, pour différentes valeurs de y, les valeurs $(f_n(y))_{n \leq 100}$.*

5. *Soit $y \in \mathbb{R}^+$. Montrer que la suite $(f_n(y))_n$ converge et que sa limite l appartient à $[0, 1[$.*

6. *Soit $y \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la limite de la suite $(f_n(y))_n$.*

7. *Reprendre cette question à l'aide du résultat de l'exercice suivant*

Exercice 2 *On considère un intervalle I, une suite de fonctions continues (A_n) avec $A_n : I \rightharpoonup \mathbb{R}$, un fonction continue $A : I \rightharpoonup \mathbb{R}$ et une suite (u_n) déléments de I qui converge vers $l \in I$.*

1. *Peut-on affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n(u_n) = A(l)$?*

2. *Ajouter une hypothèse pour arriver au résultat.*

Exercice 3 *Pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n(x) = \lfloor 3^n x \rfloor - 3 \times \lfloor 3^{n-1} x \rfloor$.*
On note T l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont tous les termes sont dans $\{0, 1, 2\}$.
Pour toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ élément de T, on pose

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}.$$

1. Montrer que la fonction σ est bien définie.

2. On définit deux éléments u et v de T par

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   A l'aide de ces deux suites, étudier l'injectivité de σ.

3. Pour tout $x \in [0, 1[$, montrer que $(t_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \in T$.

4. Ecrire une fonction en Python qui prend en entrée x et N et renvoie la somme partielle $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{t_n(x)}{3^n}$.

5. Représenter graphiquement cette somme partielle pour $N = 100$. Que peut-on conjecturer?

6. Démontrer ce résultat.

Exercice 4 *Pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.*

1. *Montrer que M_u est combinaison linéaire de trois matrices indépendantes de u et dont l'une est le carré d'une l'autre.*

2. *Ecrire un programme qui renvoie M_u. Calculer $M_{7,-14,1} \times M_{1,2,3}$ et $M_{1,2,3} \times M_{7,-14,1}$.*

3. *Soit $\mathcal{E} = \{M_u, \quad u \in \mathbb{R}^3\}$. Quelle est la structure de $\mathcal{E}$? Cet ensemble est-il stable par $\times$? La loi $\times$ est-elle commutative dans M ?*

4. *Montrer que M_u est semblable à* $\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \frac{1}{2}(b+c) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) & a - \frac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}$.

5. *Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_u soit diagonalisable.*

6. *On pose $P_m = X^3 - X^2 + m$, avec $m \in \{-0,1; 0; 0,1; 0,2\}$; tracer les courbes des différents polynômes P_m sur l'intervalle $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$.*

7. *Trouver une condition nécessaire et suffisante. sur m pour que P_m admette trois racines réelles.*

8. *Soit $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$, $T = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad a+b+c = 1\}$ et $T' = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad a+b+c = -1\}$.*
   Montrer que M_u est une matrice orthogonale si et seulement si $u \in S \cap (T \cup T')$.

Solution de l'exercice:

1 La fonction A_n est un polynôme. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}^+$, et dérivable sur $\mathbb{R}^+$:

$$\forall x \geq 0, A_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \geq 0$$

Donc A_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Comme de plus $A_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} A_n(x) + \infty$, le théorème de la bijection strictement monotone et continue entraîne que A_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.
Et donc pour tout $y \in \mathbb{R}^+$il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$tel que $A_n(x) = y$.
2 Question python

```
def A(n,x):
    s=0
    puiss =1
    for k in range (1,n+1):
        puiss *= x
        s += puiss/k
    return s
```

3 Question python

```
import scipy.optimize as resol
def fn(n, y):
    def A(x):
        return An(n,x)-y
    return resol.fsolve(A,1)
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
Y = [1,2,3,4]
couleurs = ['red','green','blue','cyan']
les_n = [n for n in range(1, 101)]
for k in range(len(Y)):
    y = Y[k]
    coul = couleurs[k]
    les_f = [f(n,y) for n in les_n]
    plt.plot(les_n,les_f,'o',color=coul,label='y='+str(y))
plt.legend()
plt.show()
```

5 Fixons un $y > 0$ et notons $u_n = f_n(y)$.:

$$\begin{aligned} A_n(u_{n+1}) &= A_{n+1}(u_{n+1}) - \frac{u_{n+1}^{n+1}}{n+1} \\ &\leq A_{n+1}(u_{n+1}) \\ &\leq y \\ &\leq A_n(u_n) \end{aligned} \tag{1}$$

Et puisque la fonction A_n est croissante, il vient que $u_{n+1} \leq u_n$.
Comme d'autre part on a $u_n \geq 0$, la suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente.

Supposons que $\ell \geq 1$. Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_n^k}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{l^k}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Ce qui est impossible du fait de la divergence de la série harmonique.
Donc $\ell < 1$.

6 Commençons par donner une expression de la fonction $A_n(x)$:

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t \\ &= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2}$$

En particulier, en conservant la notation u_n de la question précédente,

$$y = A_n(u_n) = -\ln(1-u_n) - \int_0^{u_n} \frac{t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t$$

On peut alors majorer l'intégrale qui nous pourrit les calculs :

$$0 \leq \int_0^{u_n} \frac{t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t \leq \int_0^{u_n} \frac{u_n^n}{1-u_n} \, \mathrm{d}t = \frac{u_n^{n+1}}{1-u_n} \longrightarrow 0$$

(car à partir d'un certain rang on a $u_n \leq \frac{\ell+1}{2} < 1$)
On a donc :

$$-\ln(1-u_n) \longrightarrow y$$

donc $-\ln(1-l) = y$ donc $l = 1 - e^{-y}$.
7: On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l < 1$ donc il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n < \dfrac{1+l}{2} < 1$.
La série entière $-\sum \dfrac{x^k}{k}$ est de rayon 1 donc converge normalement donc uniformément sur $\left[0, \dfrac{1+l}{2}\right]$ donc la suite de fonctions (A_n) converge uniformément vers A sur $\left[0, \dfrac{1+l}{2}\right]$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n(u_n) = A(l)$ donc $y = -\ln(1-l)$.

Solution de l'exercice:

Si $A_n : \mathbb{R}_+ \rightharpoonup \mathbb{R}$ définie comme suit:
- A_n est affine sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ avec $A_n(0) = 0$ et $A_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$
- A_n est affine sur $\left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right]$ avec $A_n\left(\dfrac{2}{n}\right) = 0$
- A_n est nulle sur $\left[\dfrac{2}{n}, +\infty\right[$

La suite de fonction (A_n) converge vers la fonction nulle:
- $A_n(0) = 0 \longrightarrow_{n \rightharpoonup +\infty} 0$
- si $x > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $\dfrac{1}{2n} < x$ donc si $n \geq n_0$, $A_n(x) = 0 \longrightarrow_{n \rightharpoonup +\infty} 0$.

On a $An\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 \longrightarrow_{n \rightharpoonup +\infty} 1 \neq A(0)$

2: Supposons que la suite (A_n) converge uniformément vers A.
On a $|A_n(u_n) - A(l)| = |A_n(u_n) - A(u_n) - A(u_n) - A(l)| \leq |A_n(u_n) - A(u_n)| + |A(u_n) - A(l)|$.
Soit $\varepsilon > 0$.
La suite de fonction converge uniformément donc $\|A_n - A\|_\infty \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ donc il existe un rang n_0 à partir duquel $\|A_n - A\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2}$
De plus A est continue en l donc $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |x-l| < \alpha \Longrightarrow |A(x) - A(l)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ donc il existe un rang n_1 à partir duquel $|u_n - l| < \alpha$.
Si $n \geq \max(n_0, n_1)$ alors $|A_n(u_n) - A(l)| < 2 \times \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ et ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ donc la suite $(A_n(u_n))$ converge vers $A(l)$.

Solution de l'exercice:
1: On a $0 \leq \dfrac{u_n}{3^n} \leq 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ et $\dfrac{1}{3} < 1$ donc par comparaison de SATP, la série $\sum u_n$ converge.
2: On a $\sigma(u) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_n}{3^n} = \dfrac{1}{3}$ et $\sigma(v) = 2\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{2}{9}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$donc σ n'est pas injective.
3: On a $3^n x - 1 < \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3^n x$ et $-3 \times 3^{n-1}x \leq 3 \times \lfloor 3^{n-1}x \rfloor < -3 \times (3^{n-1}x - 1)$
$-1 < t_n(x) < 3$. Or $t_n(x)$ est entier donc appartient à $\{0, 1, 2\}$.
4:et 5

```
def Stn(n ,x):
    S = 0
    B = 1
    for i in range(1, n+ 1):
        B*= 3
        S += (ma.floor(x*B) - 3*ma.floor(x*(B/3)))/B
    return S
T = np.arange(0, 0.99, 0.01)
F = np.array([Stn(&00, t) for t in T])
plt.figure()
plt.plot(T, F)
plt.show()
```

Il semblerait que la suite de fonctions (S_n) converge simplement vers $x \mapsto x$.
6. Posons $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{t_n(x)}{3^n}$.
Montrons par récurrence sur n que $S_n(x) = \dfrac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n}$.
Pour $n = 1$: $t_1(x) = \lfloor 3x \rfloor - 3 \times \lfloor 3^0 x \rfloor = \lfloor 3x \rfloor$ car $x \in [0, 1[$ donc $S_1(x) = \dfrac{\lfloor 3x \rfloor}{3}$.
Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \dfrac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n}$.
On a $S_{n+1}(x) = S_n(x) + \dfrac{\lfloor 3^{n+1}x \rfloor - 3 \times \lfloor 3^n x \rfloor}{3^{n+1}} = \dfrac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} + \dfrac{\lfloor 3^{n+1}x \rfloor - 3 \times \lfloor 3^n x \rfloor}{3^{n+1}} = \dfrac{\lfloor 3^{n+1}x \rfloor}{3^{n+1}}$.
Or $3^n x - 1 < \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3^n x$ donc $\dfrac{3^n x - 1}{3^n} < \dfrac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} < \dfrac{3^n x}{3^n}$ soit $x - \dfrac{1}{3^n} < S_n(x) \leq x$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = x$.

Solution de l'exercice:
1: On a $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = aI_3 + bM + cM^2$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2 question python

```
def Mu(a,b,c):
    A = a*np.eye(3)
    B = b*np.array([[0, 1, 0], [0, 0, 1], [1, 0, 0]])
    C = c*np.array([[0, 0, 1], [1, 0, 0], [0, 1, 0]])
    return A + B + C
A = Mu(7,-14,1)
B = Mu(1,2,3)

np.dot(A,B)
np.dot(B,A)\bigskip
```

Les deux matrices commutent et leur résultat est dans $\mathcal{E}$

3: On a $\mathcal{E} = vect\left(I_3, M, M^2\right)$ donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$.

Version concrète: $\left(aI_3 + bM + cM^2\right) \times \left(a'I_3 + b'M + c'M^2\right) = aa'I_3 + \left(ab' + ba'\right)M + \left(ac' + ca' + bb'\right)M^2 + \left(bc' + cb'\right)M^3$ $cc'M^4$.

On remarque que $M^3 = I_3$ donc $M^4 = M$ et $\left(aI_3 + bM + cM^2\right) \times \left(a'I_3 + b'M + c'M^2\right)$

Version abstraite: $\mathcal{E} = \left\{P\left(M\right) \text{ avec } P \in \mathbb{R}_2\left[X\right]\right\}$

Soit $P \in \mathbb{R}_2\left[X\right]$ et $Q \in \mathbb{R}_2\left[X\right]$ et $M_1 = P\left(M\right)$ et $M_2 = Q\left(M\right)$. On a $M_1M_2 = P\left(M\right) \times Q\left(M\right) = PQ\left(M\right)$.

On vérifie que $M^3 = I_n$ donc en posant $P_0 = X^3 - 1$, $P_0\left(M\right) = 0$.

Soit $PQ = P_0 \times A + B$ la division euclidienne de PQ par P_0. On a $\deg\left(B\right) < 3$ et $M_1M_2 = PQ\left(M\right) = P_0\left(M\right) \times A\left(M\right) + B\left(M\right) = B\left(M\right) \in \mathcal{E}$ donc $\mathcal{E}$ est stable par $\times$.

De plus $\times$ est commutative dans $\mathcal{E}$ car $M_1M_2 = PQ\left(M\right) = QP\left(M\right) = M_2M_1$ (le produit de polynômes est commutatif)

4: On suppose que $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel et de l'orientation usuelle.

On remarque $M \in \mathcal{O}_3\left(\mathbb{R}\right)$ et $\det\left(M\right) = 1$ donc M est une matrice dans la base canonique d'une rotation r.

Soit θ, un angle de la rotation r. On a $tr\left(r\right) = tr\left(M\right) = 1 + 2\cos\left(\theta\right) = 0$ donc $\cos\left(\theta\right) = -\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que $\theta \in \left\{-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

Soit u_1 un vecteur unitaire de l'axe de r complété en un BOND $b = \left(u_1, u_2, u_3\right)$.

Posons $b' = \left(-u_1, u_3, u_2\right)$.

Si $mat_b\left(r\right) = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & R_\theta \\ \hline\end{array}\right)$ alors $mat_{b'}\left(r\right) = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & R_{-\theta} \\ \hline\end{array}\right)$ (voir cours: suivant le choix du vecteur unitaire de l'axe, on obteint deux angles opposés).

Donc il existe une base orthonormée $b_0 = \left(u_1, u_2, u_3\right)$ directe dans laquelle la matrice de r est $\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & R_{\frac{2\pi}{3}} \\ \hline\end{array}\right)$.

On a donc $P^{-1}MP = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & R_{\frac{2\pi}{3}} \\ \hline\end{array}\right)$ avec $P = P_{bc \to b_0}$ où bc est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$P^{-1}M^2P = \left(P^{-1}MP\right)^2 = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & R_{\frac{2\pi}{3}} \\ \hline\end{array}\right)^2 = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \left(R_{\frac{2\pi}{3}}\right)^2 \\ \hline\end{array}\right)$ (calcul par blocs)

On en déduit $P^{-1}M_uP = P^{-1}\left(aI_3 + bM + cM^2\right)P = aI_3 + b\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & R_{\frac{2\pi}{3}} \\ \hline\end{array}\right) + \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & R_{\frac{4\pi}{3}} \\ \hline\end{array}\right)$, ce qui donne le résultat demandé.

5: Posons $N_u = \begin{pmatrix} a - \frac{1}{2}(b+c) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) & a - \frac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}$.

On a $P^{-1}M_uP = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & N_u \\ \hline\end{array}\right) = mat_{b_0}\left(f\right)$ avec f canoniquement associée à M_u.

Supposons M_u diagonalisable donc f diagonalisable donc d'après le cours,

l'endomorphisme induit par f sur tout sousespace stable est diagonalisable.
Or $vect\,(u_2, u_3)$ est stable par f et l'endomorphisme induit a pour matrice N_u dans la base (u_2, u_3).
On en déduit que N_u est diagonalisable.
Or $\chi_{N_u} = X^2 + (b - 2a + c)\,X + \left(\left(\frac{1}{2}b - a + \frac{1}{2}c\right)^2 + \frac{3}{4}(b - c)^2\right)$ est de discriminant
$(b - 2a + c)^2 - 4\left(\left(\frac{1}{2}b - a + \frac{1}{2}c\right)^2 + \frac{3}{4}(b - c)^2\right) = -3\,(b - c)^2$
- Si $b \neq c$ alors $sp\,(N_U) = \emptyset$ donc N_u n'est pas diagonalisable donc M_u n'est pas diagonalisable.
- Si $b = c$ alors $P^{-1}M_uP$ est diagonale donc M_u est diagonalisable.

6: graphiques avec python (déjà vu)

7: On a $P_n'(x) = x\,(3x - 2)$ donc
P_n est s^t croissante sur $]-\infty, 0[$ et $\lim\limits_{-\infty} P_n = -\infty$
P_n est s^t décroissante sur $]0, 2/3[$.
P_n est s^t croissante sur $]2/3, +\infty[$ et $\lim\limits_{+\infty} P_n = +\infty$.
On en déduit (th de la bijection s^t monotyone) que P_n admet trois racines réelles (distinctes) ssi $P_n(0) > 0$ et $P_n(2/3) < 0$ soit $m \in \left]0, (2/3)^2 - (2/3)^3\right[$.

8 En raisonnant sur les colonnes de M_u,
$M_u \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$ or $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(ab + bc + ca)$ donc $M_u \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ (a + b + c)^2 = 1 \end{cases}$, ce qui permet de conclure.