

DM 1, pour le 7/9/26

Problème

On considère $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Pour tout entier p naturel non nul, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u(n, p) = \frac{1}{n(n+1) \times \cdots \times (n+p)}.$$

Partie I : Approximation de $\zeta(2)$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2}$, $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$ et $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.

Q 1 Justifier que pour tout $n \geq 2$, $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^2} dt$.

Q 2 Montrer que $\frac{1}{N+1} - \frac{1}{P+1} \leq \sum_{n=N+1}^P u_n \leq \frac{1}{N} - \frac{1}{P}$.

Q 3 En déduire un encadrement de R_N ?

Q 4 En déduire que $|S - S_N| \leq \frac{1}{N}$. Pour quelle valeur de N le réel S_N est-il une approximation de S à 10^{-4} près.

Dans les deux questions qui suivent, on cherche à approcher S en en prenant une meilleure approximation que S_N .

Q 5 Expliquer pourquoi il suffit de calculer S_{100} pour obtenir une approximation par défaut de S à 10^{-4} près (Ce n'est pas S_{100} qu'on choisit comme approximation).

Q 6 Expliquer pourquoi il suffit de calculer S_{50} pour obtenir une approximation de S à 2×10^{-4} près.

Partie II : Généralités

Q 7 Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ est convergente.

On pose dans toute la suite: $\sigma(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u(n, p)$.

Q 8 Calculer $\sigma(1)$.

Q 9 Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$

Q 10 En déduire la valeur de $\sigma(2)$.

Les deux questions suivantes permettent de calculer $\sigma(p)$ sans utiliser de décomposition en éléments simples

Q 11 Pour $p \geq 2$ et pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $u(n, p-1) - u(n+1, p-1)$ en fonction de p et de $u(n, p)$.

Q 12 En déduire la valeur de $\sigma(p)$ en fonction de p , pour $p \geq 2$.

Q 13 Soient $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Donner une majoration du reste $R(N, q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$ en le comparant à une intégrale.

Partie III : Un exemple d'accélération de convergence.

Cette partie illustre une question importante lors de l'exécution de calculs par ordinateur: Faire le moins de calculs possibles pour obtenir une certaine précision permet:

- de minimiser le temps de calcul,
- de limiter l'erreur due à l'accumulation d'erreurs d'arrondis

On cherche ici à calculer une bonne approximation de $\zeta(3)$ en limitant le nombre de calculs.

Q 14 Déterminer trois réels a_2, b_2 et c_2 tels que pour tout réel x strictement positif et pour tout entier $p \geq 2$, on ait :

$$\frac{1}{x^3} = \frac{a_2}{x(x+1)(x+2)} + \frac{b_2x + c_2}{x^3(x+1)(x+2)}.$$

Q 15 Montrer par récurrence l'existence de trois suites $(a_p), (b_p)$ et (c_p) d'entiers naturels définies pour $p \geq 2$ telles que, pour tout réel x strictement positif et pour tout entier $p \geq 2$, on ait :

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^p \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_px + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)}.$$

Exprimer a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} à l'aide de p, b_p et c_p .

Q 16 Montrer que : $\forall p \geq 2, b_p \geq c_p \geq 0$.

Q 17 Calculer a_p, b_p, c_p pour $p = 2, 3$ et 4 .

Dans la suite, on désire calculer une valeur décimale approchée de

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

avec une erreur inférieure ou égale à $\varepsilon = 5.10^{-5}$.

Première méthode

Q 18 En utilisant la question 13, déterminer un entier naturel N suffisant pour que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3}$ soit une approximation de $\zeta(3)$ avec une précision inférieure ou égale à ε .

Deuxième méthode

On pourra admettre que $(b_4, c_4) = (50, 24)$ et $(a_2, a_3, a_4) = (1, 3, 11)$.

Q 19 En utilisant la question 13, montrer que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4n + c_4}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \leq \frac{10}{N^5} + \frac{4}{N^6}$$

et déterminer à la calculatrice la plus petite valeur de N pour laquelle $\frac{10}{N^5} + \frac{4}{N^6} \leq \varepsilon$.

En calculant à la calculatrice $\sum_{n=1}^N \frac{b_4n + c_4}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$, donner une approximation de $\zeta(3)$ à ε près.

Correction du DM 1

R 1 La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue décroissante sur $[1, +\infty[$ donc

$$\forall k \geq 2, \forall t \in [k-1, k], \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{(k-1)^2}$$

On intègre sur $[k-1, k]$:

$$\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{(k-1)^2} \text{ et donc } \forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}.$$

en sommant les inégalités,

$$\text{si } P \geq N+1, \frac{1}{N+1} - \frac{1}{P+1} \leq \int_{N+1}^{P+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=N+1}^P \frac{1}{k^2} \leq \int_N^P \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{N} - \frac{1}{P}.$$

R 2 On a $S - S_N = R_N = \lim_{P \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+1}^P \frac{1}{k^2}$ donc en passant à la limite dans l'inégalité précédente,

$$\frac{1}{N+1} \leq R_N \leq \frac{1}{N}$$

R 3 On a $|S - S_N| = |R_N| \leq \frac{1}{N}$. donc si $N \geq 10^4$, alors S_N est il une approximation de S à 10^{-4} près.

R 4 On commence par prendre $S_N + \frac{1}{N+1}$ comme approximation de S_N .

On a $|S - S_N| = |R_N|$ donc $\left| S - S_N - \frac{1}{N+1} \right| = \left| R_N - \frac{1}{N+1} \right|$ et $0 \leq R_N - \frac{1}{N+1} \leq \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}$ donc

$$\left| S - S_N - \frac{1}{N+1} \right| = \left| S - \left(S_N + \frac{1}{N+1} \right) \right| \leq \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)} \leq \frac{1}{N^2}$$

donc $S_{100} + \frac{1}{101}$ est une approximation (par défaut) de S à $\frac{1}{100^2} = 10^{-4}$ près

R 5 Le milieu de $\left[S_N + \frac{1}{N+1}, S_N + \frac{1}{N} \right]$ est $S_N + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) = S_N + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{N(N+1)}$ que nous prenons comme approximation de S .

L'inégalité $\frac{1}{N+1} \leq S - S_N \leq \frac{1}{N}$ entraîne que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) &\leq S - S_N - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \\ \left| S - S_N - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \right| &\leq \frac{1}{2N(N+1)} \leq \frac{1}{2N^2} \end{aligned}$$

donc $S_{50} + \frac{1}{51} + \frac{1}{2 \cdot 50 \times 51}$ est une approximation de S à $\frac{1}{2 \times 50^2} = 2 \times 10^{-4}$ près

R 6 L'entier p étant fixé, $u(n, p) = \frac{1}{n(n+1) \times \dots \times (n+p)} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ et $p \geq 1$ donc $p+1 \geq 2 > 1$ donc la

SATP $\sum \frac{1}{n^{p+1}}$ est convergente donc la série $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ est convergente.

R 7 On a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = u(n, 1)$ donc

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1 \text{ donc } \sigma(1) = 1$$

R 8 $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{2a + (a+b+c)n^2 + bn^2 + cn^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$$

En résolvant le système $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases}$, on obtient $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$ donc

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = u(n, 2).$$

R 9 On en déduit que $u(n, 2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = v_n - v_{n+1}$ avec $v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

donc que $\sum_{n=1}^N u(n, 2) = \sum_{n=1}^N v_n - v_{n+1} = v_1 - v_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} v_1 = \frac{1}{4}$ donc $\sigma(2) = \frac{1}{4}$.

R 10 On simplifie la fraction :

$$u(n, p-1) - u(n+1, p-1) = \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+p)} = \frac{n+p-n}{n(n+1) \cdots (n+p)} = p \cdot u(n, p)$$

$$\boxed{u(n, p-1) - u(n+1, p-1) = p \cdot u(n, p)}$$

R 11 Ce qui donne comme $p > 0$

$$u(n, p) = \frac{u(n, p-1)}{p} - \frac{u(n+1, p-1)}{p}$$

Donc $u(n, p)$ est du type $a(n+1) - a(n)$ avec $a(n) = -\frac{u(n, p-1)}{p}$.

On a $\sum_{i=1}^N u(i, p) = \sum_{i=1}^N a(i+1) - a(i) = a(N+1) - a(1)$ par télescopage. et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u(n, p-1) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a(n) = 0$

donc comme $a(1) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots p} = \frac{1}{p \cdot p!}$ on a

$$\boxed{\text{pour } p \geq 2, \sigma_p = \frac{1}{p \cdot p!}}$$

le résultat reste vrai si $p = 1$.

R 12 La fonction $t \mapsto t^q$ est continue décroissante sur $[1, +\infty[$ donc

$$\forall k \geq 2, \forall t \in [k-1, k], \frac{1}{k^q} \leq \frac{1}{t^q}$$

On intègre sur $[k-1, k]$ et on somme les inégalités :

$$\forall k \geq 2, \frac{1}{k^q} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{t^q} \text{ donc si } M \geq N+1, \sum_{k=N+1}^M \frac{1}{k^q} \leq \int_N^M \frac{dt}{t^q} = \frac{1}{(q-1)N^{q-1}} - \frac{1}{(q-1)M^{q-1}}$$

Or $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{(q-1)M^{q-1}} = 0$ —et. comme $q \geq 2$, la série $\sum \frac{1}{k^q}$ converge donc en passant à la limite lorsque M tend vers l'infini:

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^q} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^q} = \frac{1}{(q-1)N^{q-1}}$$

$$\boxed{\forall q \geq 2, \forall N \geq 1, \quad \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^q} \leq \frac{1}{(q-1)N^{q-1}}}$$

R 13 On remarque que comme $x > 0$ les dénominateurs sont tous non nuls.
si $p = 2$ on veut :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x^3} = \frac{a_2}{x(x+1)(x+2)} + \frac{b_2x + c_2}{x^3(x+1)(x+2)}$$

Ce qui équivaut, en réduisant au même dénominateur à:

$$\forall x > 0, \quad (x+1)(x+2) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

Il suffit de prendre

$$\boxed{a_2 = 1, b_2 = 3, c_2 = 2}$$

D'où l'existence (l'unicité de a_2, b_2 et c_2 n'est pas demandée)

R 14 On suppose la relation vérifiée au rang p :

Pour prouver la relation au rang $p+1$ il suffit de montrer l'existence de a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} tels que pour tout $x > 0$:

$$\forall x > 0, \quad \frac{b_px + c_p}{x^3(x+1) \cdots (x+p)} = \frac{a_{p+1}}{x(x+1) \cdots (x+p)(x+p+1)} + \frac{b_{p+1}x + c_{p+1}}{x^3(x+1) \cdots (x+p)(x+p+1)} : (\mathcal{R})$$

En éliminant les dénominateurs communs $(\mathcal{R})$ équivaut à:

$$\forall x > 0, \quad \frac{b_px + c_p}{x^2} = \frac{a_{p+1}}{(x+p+1)} + \frac{b_{p+1}x + c_{p+1}}{x^2(x+p+1)}$$

En réduisant au même dénominateur la relation $(\mathcal{R})$ équivaut à:

$$(b_px + c_p)(x+p+1) = a_{p+1}x^2 + b_{p+1}x + c_{p+1} \text{ — or } (b_px + c_p)(x+p+1) = b_px^2 + (c_p + (p+1)b_p)x + (p+1)c_p$$

Il suffit donc de poser:

$$\boxed{a_{p+1} = b_p, \quad b_{p+1} = c_p + (p+1)b_p, \quad c_{p+1} = (p+1)c_p}$$

On vérifie par récurrence immédiate que $\forall p \geq 2, (a_p, b_p, c_p) \in \mathbb{N}^3$.

R 15 Vue la formule donnant c_p on a $\forall p \geq 2, c_p = p!$ et donc $c_p > 0$.

On justifie alors par récurrence que $b_p \geq c_p$:

si $p = 2$ on a bien $3 \geq 2$

Si $b_p \geq c_p$, alors comme $p+1 > 0$, $(p+1)b_p \geq (p+1)c_p \geq (p+1)! = c_p$ et comme $c_p \geq 0$ on a bien $b_{p+1} \geq c_{p+1}$.

R 16 Un calcul à la main ou à la machine donne : $b_2 = 3, b_3 = 11, b_4 = 50$ et donc $a_3 = 3, a_4 = 11$

i	2	3	4
a_i	1	3	11
b_i	3	11	50
c_i	2	6	24

R 17 D'après la relation de la question 13, il suffit d'avoir :

$$\frac{1}{2N^2} \leq 5.10^{-5}$$

soit $10^{-4}N^2 \geq 1$. Il suffit de prendre $\boxed{N=100}$.

R 18 En minorant $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ par n^4 et en passant à l'inverse, on obtient;

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4n + c_4}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \leq b_4 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} + c_4 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^7}$$

Soit en utilisant la question 13 et les valeurs de b_4 et c_4 ,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4n + c_4}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \leq 50 \frac{1}{5.N^5} + 24 \frac{1}{6.N^6} = \frac{10}{N^5} + \frac{4}{N^6}$$

si $N \leq 10$ alors $\frac{10}{N^5} + \frac{4}{N^6} > 5.10^{-5}$. On vérifie que c'est encore le cas si $N = 11$ mais pas pour $N = 12$. Il suffit donc de prendre $N = 12$ qui donne $\frac{10}{N^5} + \frac{4}{N^6} \leq 4,2.10^{-5}$

R 19 On a

$$\frac{1}{k^3} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{11}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} + \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

On ajoute ces égalités :

$$\xi(3) = \sigma(2) + 3.\sigma(3) + 11\sigma(4) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

On décompose :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} = \sum_{k=1}^N \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$\text{En posant } \varepsilon' = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$\xi(3) = \sigma(2) + 3.\sigma(3) + 11\sigma(4) + \sum_{k=1}^N \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} + \varepsilon'$$

On prend comme approximation de $\xi(3)$ le réel $\sigma(2) + 3.\sigma(3) + 11\sigma(4) + \sum_{k=1}^N \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$.

Pour que cette approximation soit à ε près, il suffit donc (en négligeant les erreurs d'arrondi) d'avoir

$$|\varepsilon'| = \varepsilon' = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \leq \varepsilon, \text{ ce qui est assuré si } \frac{10}{N^5} + \frac{4}{N^6} \leq 5.10^{-5} \text{ donc pour } N = 12.$$

les 3 premiers termes sont connus:

$$\xi(3) = \frac{1}{4} + 3.\frac{1}{18} + 11.\frac{1}{96} + \sum_{k=1}^{12} \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} + \varepsilon'$$

Reste à utiliser sa machine à calculer :

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} = 0,6707885152$$

ce qui donne

$$\xi(3) = 1.202038515 \pm 4,2.10^{-5}$$

La valeur obtenue est bien une valeur par défaut car ε' est un réel positif comme somme de réels positifs.

une valeur approchée de $\xi(3)$ et 1.202038 à 5.10^{-5} par défaut