

DM 2, pour le 14/9/26

- Le corrigé sera sur le site cahier de prépa à partir du 13/9/26.
- Il est demandé de rendre le DS après avoir effectué une autocorrection (écrite avec une couleur différente) faite à l'aide du corrigé.
- Vous pouvez inscrire des questions demandant si votre solution est correcte. **A indiquer en début de DM.**

Exercice 1

Soient $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $M(a)$ la matrice carrée de taille n dont les coefficients sont définis par $m_{i,j} = a_j$. Soit $E = \{M(a), a \in \mathbb{R}^n\}$.

Q 1 Montrer que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 2 Donner une base et la dimension de E .

Q 3 Calculer pour a et b dans $\mathbb{R}^n$, $M(a) \times M(b)$.

On note f_a l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M(a)$.

Q 4 On suppose $a \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Déterminer une base de $\text{Im}(f_a)$. Justifier que $\ker(f_a)$ est un hyperplan dont on donnera une équation.

Q 5 A quelle condition f_a est-il un projecteur?

Soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M_p = (m_{i,j}(p))_{(i,j) \in [[1,n]]^2}$. On dit que la suite (M_p) converge vers $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [[1,n]]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall (i,j) \in [[1,n]]^2$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} m_{i,j}(p) = m_{i,j}$. On pose alors $M = \lim_{p \rightarrow +\infty} M_p$.

Par exemple, si $M_p = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{p} & 2 + \frac{1}{p^2} \\ 3 + e^{-p} & 4 \end{pmatrix}$ alors la suite (M_p) converge vers $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Q 6 On pose, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A) = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p$ avec $S_p = \sum_{i=0}^p \frac{A^i}{i!}$.

Montrer que $\exp(M(a))$ est bien définie et exprimer $\exp(M(a))$ en fonction de a .

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = id$ et $u \neq id$.

Q 7 Justifier que $(u - id) \circ (u^2 + u + id) = 0$.

Q 8 Montrer $\ker(u - id) \cap \ker(u^2 + u + id) = \{0\}$.

Les deux questions qui suivent illustrent la méthode d'analyse-synthèse pour montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires:

Q 9 Soit $x \in E$. On suppose que $x = a + b$ avec $(a, b) \in \ker(u - id) \times \ker(u^2 + u + id)$.

Montrer que $\begin{cases} a = \frac{1}{3}(x + u(x) + u^2(x)) \\ b = \frac{1}{3}(2x - u(x) - u^2(x)) \end{cases}$.

Q 10 En déduire que $E = \ker(u - id) \oplus \ker(u^2 + u + id)$.

Q 11 Montrer que le sous-espace $\ker(u^2 + u + id)$ est stable par u .
(c'est-à-dire que $\forall x \in \ker(u^2 + u + id), u(x) \in \ker(u^2 + u + id)$).

On pose $F = \ker(u^2 + u + id)$ et v l'endomorphisme induit par u sur F : $v : \begin{cases} F \rightarrow F \\ x \mapsto v(x) = u(x) \end{cases}$.

Q 12 Justifier que $(v + \frac{1}{2}id_F)^2 = -\frac{3}{4}id_F$.

Q 13 En déduire que la dimension de F est paire (on pourra passer au déterminant dans la relation précédente).

On suppose que E est de dimension 3.

Q 14 Montrer que si $e \in F$, et $e \neq 0$, alors $u(e)$ n'est pas colinéaire à e .

Q 15 Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit (λ_n) une suite de réels positifs. On suppose que la série $\sum \lambda_n$ converge.

On pose $p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \lambda_k^2}$ et $\theta_n = \arcsin\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{1 + \lambda_n^2}}\right)$.

Soient a et b des réels. On définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - \lambda_n v_n \\ v_{n+1} = \lambda_n u_n + v_n \end{cases}$$

Q 16 Montrer que la série $\sum \theta_n$ converge.

Q 17 Montrer que la suite (p_n) converge.

On pose $z_n = u_n + iv_n$.

Q 18 Montrer qu'il existe un réel $\rho_n > 0$ tel que $z_{n+1} = \rho_n e^{i\theta_n} z_n$.

Q 19 En déduire que les suites (z_n) , (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 4 facultatif

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - f(x-1) = 0 \end{cases}$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin(f(n))$.

Le but de l'exercice est de montrer que $\forall a \in [-1, 1]$, il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers a .

On suppose que $a \in [-1, 1]$ et on pose $b = \arcsin(a)$.

Q 20 Justifier qu'on peut construire par récurrence une suite strictement croissante d'entiers naturels $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}}$

vérifiant $\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}, f(\varphi(n)) - \frac{1}{n} \leq b + 2k\pi \leq f(\varphi(n)) \end{cases}$

Q 21 Justifier que la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a .

Q 22 Les suites $(\sin(\ln(n)))_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\sin(\sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent-elles?

Correction du DM2:

Exercice 1

R 1 Montrer que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{R\ 2} \quad M(a) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} = a_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} + \dots + a_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $M_i \in E$ donc $E = \text{vect}(M_1, \dots, M_n)$.

Si $\sum_{i=1}^n a_i M_i = 0$ alors $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 0$ donc $(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$ donc $(M_1, \dots, M_n)$ est une famille libre donc base de E . On en déduit que $\dim(E) = n$.

$$\mathbf{R\ 3} \quad M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + \dots + a_n b_1 & \dots & a_1 b_n + \dots + a_n b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 b_1 + \dots + a_n b_1 & \dots & a_1 b_n + \dots + a_n b_n \end{pmatrix}$$

$$M(a) \times M(b) = (a_1 + \dots + a_n) \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

R 4 On a $\text{Im}(f_a) = \text{vect}(C_1, \dots, C_n) = \text{vect}(a_1 U, \dots, a_n U)$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a \neq 0$ donc $\exists i, a_i \neq 0$ donc

$\text{Im}(f_a) = \text{vect}(U)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a $X \in \ker(f) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \\ \vdots \\ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ équation

d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. (on aurait pu justifier que $\ker(f_a)$ est un hyperplan avec le th du rang).

R 5 f_a est un projecteur si et seulement si $f_a \circ f_a = f_a$ soit $M(a) \times M(a) = M(a)$.

Or $M(a) \times M(a) = (a_1 + \dots + a_n) M(a)$ donc f_a est un projecteur si et seulement si $a_1 + \dots + a_n = 1$.

R 6 Posons $\alpha = a_1 + \dots + a_n$. On a $M(a)^2 = \alpha M(a)$ et, par récurrence immédiate, si $i \in \mathbb{N}^*$, $M(a)^i = \alpha^{i-1} M(a)$ d'où Posons $S_p = \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} M(a)^i$. On a $S_p = I_n + M(a) + \frac{\alpha}{1!} M(a) + \dots + \frac{\alpha^{p-1}}{p!} M(a) = I_n + \left(1 + \frac{\alpha}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{p-1}}{p!}\right) M(a)$

- Si $\alpha = 0$, alors $\sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} M(a)^i = I_n + M(a)$ et donc $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} M(a)^i$ existe et est égal à $I_n + M(a)$ donc $\exp(M(a)) = I_n + M(a)$

- Si $\alpha \neq 0$. Posons $s_p = 1 + \frac{\alpha}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{p-1}}{p!}$.

On a $s_p = \frac{1}{\alpha} \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^p}{p!} \right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}$ et $S_p = I_n + s_p M(a)$.

On a donc $S_p = \begin{pmatrix} 1 + s_p a_1 & s_p a_2 & \cdots & s_p a_n \\ s_p a_1 & 1 + s_p a_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & s_p a_n \\ s_p a_1 & s_p a_2 & & 1 + s_p a_n \end{pmatrix}$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p$ existe et est égal à $I_n + \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} M(a)$.

Exercice 2

R 7 On a $(u - id) \circ (u^2 + u + id) = (u^3 + u^2 + u) - (u^2 + u + id) = u^3 - id = 0$.

R 8 Si $x \in \ker(u - id) \cap \ker(u^2 + u + id)$ alors $\begin{cases} u(x) = x \\ u^2(x) + u(x) + x = 0_E \end{cases}$ On a donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(x) = x$ donc en reportant dans la deuxième ligne, $3x = 0_E$ donc $x = 0_E$.

R 9 On a $x = a + b$ avec $(a, b) \in \ker(u - id) \cap \ker(u^2 + u + id)$ donc

$\begin{cases} u(a) = a \\ u^2(b) + u(b) + b = 0_E \end{cases}$ et $\begin{cases} x = a + b \\ u(x) = u(a) + u(b) = a + u(b) \\ u^2(x) = u(a) + u^2(b) = a + u^2(b) \end{cases}$. En additionnant les trois lignes, on obtient $3a = x + u(x) + u^2(x)$ donc $a = \frac{1}{3}(x + u(x) + u^2(x))$ et en reportant dans la première ligne, $b = \frac{1}{3}(2x - u(x) - u^2(x))$ (fin de l'analyse)

R 10 Réciproquement (synthèse), si $\begin{cases} a = \frac{1}{3}(x + u(x) + u^2(x)) \\ b = \frac{1}{3}(2x - u(x) - u^2(x)) \end{cases}$, on obtient en sommant que $x = a + b$.

De plus $a = \frac{1}{3}(u^2 + u + id)(x) \in \text{Im}(u^2 + u + id) \subset \ker(u - id)$ car $(u - id) \circ (u^2 + u + id) = 0$ et

$$b = \frac{1}{3} \left(\underbrace{2(x - u(x))}_{\in \text{Im}(u - id)} + \underbrace{(u(x) - u^2(x))}_{\in \text{Im}(u - id)} \right) \in \text{Im}(u - id) \subset \ker(u^2 + u + id) \text{ car } (u^2 + u + id) \circ (u - id) = 0.$$

et x admet donc une et une seule décomposition $x = a + b$ avec $(a, b) \in \ker(u - id) \times \ker(u^2 + u + id)$ donc que $E = \ker(u - id) \oplus \ker(u^2 + u + id)$.

R 11 Soit $x \in \ker(u^2 + u + id)$, montrons $u(x) \in \ker(u^2 + u + id)$, c'est-à-dire $(u^2 + u + id)(u(x)) = 0_E$.

On a $(u^2 + u + id) \circ u = u^3 + u^2 + id = u \circ (u^2 + u + id)$ donc $(u^2 + u + id) \circ u(x) = u \circ (u^2 + u + id)(x) = u((u^2 + u + id)(x))$.

Or $x \in \ker(u^2 + u + id)$ donc $(u^2 + u + id)(x) = 0_E$ donc $(u^2 + u + id)(u(x)) = 0_E$ donc $\ker(u^2 + u + id)$ est stable par u .

R 12 Si $x \in F$ alors $(v^2 + v + id_F)(x) = u^2(x) + u(x) + x = 0$ donc $v^2 + v + id_F = 0_E$.

Or $(v + \frac{1}{2}id_F)^2 = v^2 + v + \frac{1}{4}id = v^2 + v + id - \frac{3}{4}id = -\frac{3}{4}id$.

R 13 On a $(v + \frac{1}{2}id_F)^2 = -\frac{3}{4}id_F$. On a $\det\left((v + \frac{1}{2}id_F)^2\right) = \det\left(-\frac{3}{4}id_F\right)$ donc

$$0 \leq \left(\det\left(v + \frac{1}{2}id_F\right)\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{\dim(F)}, \text{ ce qui implique que } \dim(F) \text{ est paire.}$$

R 14 Soit $e \in \ker(u^2 + u + id)$, $e \neq 0$.

Supposons qu'il existe un réel λ tel que $u(e_2) = \lambda e_2$. Alors $u^2(e_2) = u(\lambda e_2) = \lambda u(e_2) = \lambda^2 e_2$. Or $u^2(e_2) + u(e_2) + id(e_2) = 0$ donc $(\lambda^2 + \lambda + 1)e_2 = 0_E$ donc $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, ce qui contredit $\lambda \in \mathbb{R}$ (discriminant de l'équation strictement négatif) donc $u(e)$ n'est pas colinéaire à e .

R 15 On sait que $\dim(F) \leq 3$ est paire $\dim(F) \in \{0, 2\}$.

Si $\dim(F) = 0$ alors $\ker(u^2 + u + id) = \{0\}$ donc $u^2 + u + id$ est un endomorphisme injectif de E , de dimension finie, donc est bijectif et $(u - id) \circ (u^2 + u + id) = 0$ donc en composant à gauche par $(u^2 + u + id)^{-1}$, on obtient $u - id = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $u \neq id$. On en déduit que $\dim(F) = 2$.

Comme $E = \ker(u - id) \oplus \ker(u^2 + u + id)$, la dimension de $\ker(u - id)$ vaut 1. Soit (e_1) une base de $\ker(u - id)$ et $e \in \ker(u^2 + u + id)$, $e \neq 0$.

D'après la question précédente, $(e, u(e))$ libre et $\ker(u^2 + u + id)$ est stable par u donc $u(e) \in \ker(u^2 + u + id)$ donc $(e, u(e))$ est une base de $\ker(u^2 + u + id)$.

On en déduit que $(e_1, e, u(e))$ est une base de E et, comme $u^2(e) + u(e) + e = 0$, $u(u(e)) = -e - u(e)$ donc

$$\text{mat}_{(e_1, e, u(e))}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

R 16 On a $\arcsin(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$ donc $\theta_n = \arcsin\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}$. Or la série $\sum \lambda_n$ converge donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$ donc $\theta_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n > 0$. Par théorème de comparaison de SATP, la série $\sum \theta_n$ converge.

R 17 On a $\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\sqrt{1+\lambda_k^2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+\lambda_k^2)$. Posons $a_n = \ln(1+\lambda_n^2)$ et $s_n = \sum_{k=0}^n \ln(1+\lambda_k^2)$ On a $\ln(1+x)_{x \rightarrow 0} x$ donc $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^2$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$ donc $\lambda_n^2 = o_{n \rightarrow +\infty}(\lambda_n)$ et $\sum \lambda_n$ est une SATP, convergente donc la série $\sum a_n$ converge. On en déduit que la suite (s_n) converge donc que la suite $(s_{n-1}) = (\ln(p_n))$ converge vers un réel l , puis, que la suite (p_n) converge $e^l > 0$ par composition des limites.

R 18 On a $z_{n+1} = u_{n+1} + iv_{n+1} = (u_n - \lambda_n v_n) + i(\lambda_n u_n + v_n) = (1 + i\lambda_n)(u_n + iv_n)$.

On a $1 + i\lambda_n = \sqrt{1+\lambda_n^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n^2}} + i \frac{\lambda_n}{\sqrt{1+\lambda_n^2}} \right)$ et

On a $\theta_n = \arcsin\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}\right)$ donc $\sin(\theta_n) = \frac{\lambda_n}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}$ et $\theta_n \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos^2(\theta_n) = 1 - \frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2} = \frac{1}{1+\lambda_n^2}$ et $\cos(\theta_n) \geq 0$ donc $\cos(\theta_n) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}$. On en déduit que $z_{n+1} = \rho_n e^{i\theta_n} z_n$ avec $\rho_n = \sqrt{1+\lambda_n^2}$.

R 19 D'où $z_n = \rho_{n-1} e^{i\theta_{n-1}} z_{n-1} = (\rho_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}) (\rho_{n-2} e^{i\theta_{n-2}}) z_{n-2} = \dots = (\rho_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}) (\rho_{n-2} e^{i\theta_{n-2}}) \dots \rho_0 e^{i\theta_0} z_0$

$z_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+\lambda_k^2} \times e^{i \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k} \times u_0 = p_n \times e^{iS_{n-1}} \times u_0$ avec $S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k$.

La série $\sum \theta_n$ converge donc la suite (S_{n-1}) converge donc la suite $(e^{iS_{n-1}})$ converge par composition des limites.

La suite (p_n) converge.

On en déduit que la suite (u_n) converge. Par passage aux parties réelles et imaginaire, les suites (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 4 facultatif

R 20 Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $(\varphi(0), \dots, \varphi(n))$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(0) = 0 \\ \forall i \in [[0, n-1]], \varphi(i) \leq \varphi(i+1) \\ \forall i \in [[1, n]], \exists k \in \mathbb{N}, f(\varphi(i)) - \frac{1}{i} \leq b + 2k\pi \leq f(\varphi(i)) \end{array} \right.$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - f(x-1) = 0$ donc il existe x_0 tel que $x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x-1)| \leq \frac{1}{n+1}$.

Posons $M = \max(x_0, \varphi(n))$.

On a $\lim_{k \rightarrow +\infty} b + 2k\pi = +\infty$ donc il existe k_0 tel que, $M \leq b + 2k_0\pi$.

Considérons $\mathcal{E} = \{i \in \mathbb{N}, i \geq b + 2k_0\pi\}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\mathcal{E}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément.

Posons $\varphi(n+1) = \inf(\mathcal{E})$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(n+1) &\geq M \geq \varphi(n) \\ \varphi(n+1) &\geq b + 2k_0\pi \text{ et } \varphi(n+1) - 1 < b + 2k_0\pi \\ |f(\varphi(n+1)) - f(\varphi(n+1) - 1)| &\leq \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

On a donc $f(\varphi(n+1)) - \frac{1}{n+1} \leq f(\varphi(n+1) - 1) < b + 2k_0\pi \leq f(\varphi(n+1))$ donc les conditions sont remplies au rang $n+1$. On en déduit qu'il existe une suite d'entiers strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}, f(\varphi(n)) - \frac{1}{n} < b + 2k\pi \leq f(\varphi(n)).$$

R 21 On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}, |b + 2k\pi - f(\varphi(n))| \leq \frac{1}{n}$ et la fonction sinus est 1-lipschitzienne donc $|\sin(b + 2k\pi) - \sin(f(\varphi(n)))| \leq \frac{1}{n}$ avec $\sin(b + 2k\pi) = \sin(b) = a$ donc $|a - u_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{n}$ donc la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a .

R 22 La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ vérifie les conditions $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - f(x-1) = 0 : (*) \end{array} \right.$

Soit $a \in [-1, 1]$. Il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ convergeant vers a . Or a est quelconque dans $[-1, 1]$ donc les suites extraites de (u_n) ne convergent pas toutes vers une même limite donc (u_n) ne converge pas.

(*) : On a $f'(t) = \frac{1}{t}$ donc si $t \in [x-1, x]$, alors $|f'(t)| \leq \frac{1}{x-1}$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis

$$|\ln(x) - \ln(x-1)| \leq \frac{1}{x-1} |x - (x-1)| = \frac{1}{x-1} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0.$$

On peut faire de même avec $x \mapsto \sqrt{x}$.