

DM 3, pour le 25/9/26

Exercice 1: Commutant d'un endomorphisme

On considère un espace vectoriel E de dimension 3 et un endomorphisme f de E vérifiant $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit $e \in E$ tel que $f^2(e) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $b = (e, f(e), f^2(e))$ est libre.
2. Déterminer la matrice J de f dans la base b .
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$. A quelle condition a-t-on $A \times J = J \times A$?
4. En déduire qu'un endomorphisme g de E vérifie $g \circ f = f \circ g$ si et seulement si $g \in \text{vect}(id_E, f, f^2)$.

Problème: (méthode de résolution par changement de base)

Dans ce problème, étant donnée une matrice carrée M , on cherche à voir s'il est possible d'écrire M sous forme $XY - YX$ ou X et Y sont des matrices carrées de même taille que M .

On considère $n \in \mathbb{N}^*$.

I Un cas où ce n'est pas possible:

1. Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Déterminer la trace de $XY - YX$.
2. Donner un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle il n'existe pas $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ vérifiant $M = XY - YX$.

II Etude d'un exemple:

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à M et (e_1, e_2) la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$.

1. Justifier que la famille $(e_1, f(e_1))$ est une base de E . Calculer $f \circ f(e_1)$.
2. En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Préciser la valeur de la matrice P obtenue.
3. On pose $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer une matrice $X_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M_1 = X_1Y_1 - Y_1X_1$.
4. Déterminer des matrices X et Y de taille 2 vérifiant $M = XY - YX$ (on partira du résultat de la question précédente).

III Etude d'un deuxième exemple:

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée à B . Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $u_1 = e_1$, $u_2 = f(e_1)$ et $u_3 = f(u_2)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $f(u_3)$ dans la base (u_1, u_2, u_3) .
3. Déterminer une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{On pose } B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV Mise sous forme $XY - YX$ de certaines matrices

Le but de cette partie est de montrer que pour toute matrice carrée M de diagonale nulle, il existe deux matrices carrées X et Y de même taille que M vérifiant $M = XY - YX$.

$$\text{On considère une matrice diagonale de taille } n, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Soit l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(X) = XD - DX$.

1. Montrer que l'application φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit F_n l'ensemble des matrices de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. Montrer que F_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.
3. Soit $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$. Déterminer l'image par φ de la matrice élémentaire $E_{i,j}$.
En déduire que $\text{Im}(\varphi) = F_n$.
4. Déterminer le noyau de φ .
5. Soit M une matrice carrée de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
 - Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telle que $M = X_0D - DX_0$.
 - Déterminer l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telle que $M = XD - DX$.
(on donnera le résultat à l'aide de la matrice X_0 obtenue précédemment que l'on ne cherchera pas à expliciter).
6. Déterminer une matrice $X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B' = X_0D - DX_0$.
7. En déduire un couple (X, Y) de matrices carrées X et Y de taille 3 vérifiant $B = XY - YX$.
On demande juste d'exprimer X et Y en fonction des matrices obtenues précédemment.

Exercice 2: Un calcul de la somme de la série harmonique alternée

Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n) . En déduire que la suite (u_n) converge.

2. Calculer u_0, u_1 et u_2 .
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_{n+2} + u_n$. En déduire la limite de la suite (u_n) .
4. Pour tout $n \geq 2$, montrer que $\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$. En déduire un équivalent simple de u_n , lorsque n tend vers l'infini, puis la nature de la série de terme général u_n .
5. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
 - a Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p (u_{2p+3} + u_{2p+1}) = \frac{1}{2} S_N$.
 - b En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et préciser la somme de cette série

Exercice 3: (facultatif)

On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Préciser en fonction de $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $1 + j^n + j^{2n}$.
2. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3} \left(e + \frac{2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{e}} \right)$ (on pourra utiliser la série exponentielle pour plusieurs valeurs de z bien choisies).

CORRECTION DU DM3

Exercice 1:

Q1: Supposons $\lambda e + \mu f(e) + \gamma f^2(e) = 0$. En appliquant f^2 , compte tenu de la linéarité et du fait que $f^3 = 0$, on obtient $\lambda f^2(e) = 0$ donc $\lambda = 0$ car $f^2(e) \neq 0$. De même, en appliquant f , on déduit que $\mu = 0$ donc $\gamma = 0$ donc la famille $b = (e, f(e), f^2(e))$ est libre.

Q2: la famille $b = (e, f(e), f^2(e))$ est libre dans un espace de dimension 3 donc est une base de E . On obtient

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ car } f(f^2(e)) = f^3(e) = 0.$$

Q3: On $J \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & d & g \\ b & e & h \end{pmatrix}$ et $A \times J = \begin{pmatrix} d & g & 0 \\ e & h & 0 \\ f & i & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que $AJ = JA$ si et seulement si $a = e = i$, $b = f$ et $d = g = h = 0$ donc si et seulement si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

Q4: On remarque que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} = aI_3 + bJ + cJ^2$. Soit un endomorphisme g de E de matrice A dans la base b .
On a $g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow AJ = JA \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, A = aI_3 + bJ + cJ^2 \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, g = a\text{id}_E + bf + cf^2 \Leftrightarrow g \in \text{vect}(\text{id}_E, f, f^2)$.

Problème:

V Etude d'un exemple:

1. On a $f(e_1) = e_1 + 3e_2$. n'est pas colinéaire à e_1 donc la famille $b' = (e_1, f(e_1))$ est libre donc base de $\mathbb{R}^2$. On a $f \circ f(e_1) = f(e_1 + 3e_2) = f(e_1) + 3f(e_2) = 7e_1$.

2. On a donc $\text{mat}_{b'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $P = P_{(e_1, e_2)}^{b'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Si $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ alors $XY_1 - Y_1X_1 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. donc si $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $M_1 = X_1Y_1 - Y_1X_1$.

4. On a $M_1 = X_1Y_1 - Y_1X_1$ et $M = PM_1P^{-1}$ donc $M = PX_1Y_1P^{-1} - PY_1X_1P^{-1} = (PX_1P^{-1})(PY_1P^{-1}) - (PY_1P^{-1})(PX_1P^{-1})$. On peut donc choisir $X = (PX_1P^{-1})$ et $Y = (PY_1P^{-1})$.

Pour finir les calculs, on doit calculer P^{-1} . Méthode de résolution du système $PX = B$:

On résoud le système $P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On a $P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ 3y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - \frac{b}{3} \\ y = \frac{b}{3} \end{cases}$

On en déduit que $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{8}{3} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

et $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

VI Etude d'un deuxième exemple:

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée à B . Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $u_1 = e_1$, $u_2 = f(e_1)$ et $u_3 = f(u_2)$

1. On a $u_1 = e_1$ donc $u_2 = f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$ et $u_3 = f(u_2)$ Le calcul $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ entraîne que $u_3 = 3e_1 + e_2 + 2e_3$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ car $\det_{(e_1, e_2, e_3)}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

2. On a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $f(u_3) = 2u_1 + 4u_2$.

3. On en déduit que $\text{mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B'$ et d'après la formule de changement de base, $B' = P^{-1}BP$ avec .

$$P = P_{(e_1, e_2, e_3)}^{(u_1, u_2, u_3)} = \text{mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

VII Mise sous forme $XY - YX$ de certaines matrices

Le but de cette partie est de montrer que pour toute matrice carrée M de diagonale nulle, il existe deux matrices carrées X et Y de même taille que M vérifiant $M = XY - YX$.

On considère une matrice diagonale de taille n , $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$. Soit l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(X) = XD - DX$.

1. On a bien $\varphi(X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\varphi(\lambda X + \lambda' X') = (\lambda X + \lambda' X')D - D(\lambda X + \lambda' X') = \lambda(XD - DX) + \lambda'(X'D - DX') = \lambda\varphi(X) + \lambda'\varphi(X')$.
2. La matrice nulle appartient à F_n . Soit $(M, M') \in F_n^2$ et $M'' = \lambda M + \lambda' M'$. On a $m''_{i,i} = \lambda m_{i,i} + \lambda' m'_{i,i} = 0$ donc $M'' \in F_n$ donc F_n est un sous-ev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in F_n$, alors $M = \sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2} m_{i,j} E_{i,j} = \sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2, i \neq j} m_{i,j} E_{i,j}$ car $m_{i,i} = 0$ et si $i \neq j$, alors $E_{i,j} \in F_n$ donc $\mathcal{F} = (E_{i,j}, (i,j) \in [[1,n]]^2, i \neq j)$ est une famille génératrice de F_n . Par ailleurs $\mathcal{F}$ est une famille de matrices élémentaire donc est libre donc c'est une base de F_n donc $\dim(F_n) = n^2 - n$.
3. On vérifie que $\varphi(E_{i,j}) = (i - j) E_{i,j}$ (et donc $\varphi(E_{i,i}) = 0$) La famille $(E_{i,j})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc la famille $(\varphi(E_{i,j}))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(\varphi)$. l'image de φ est donc l'espace vectoriel engendré par la famille $((i - j) E_{i,j})_{i \neq j}$ donc par $(E_{i,j})_{i \neq j}$ donc $\text{Im}(\varphi) = F_n$.
4. Chaque $E_{i,i}$ est élément de $\ker(\varphi)$ et $\dim(\ker(\varphi)) = n^2 - \dim(\text{Im}(\varphi)) = n^2 - (n^2 - n) = n$. Or la famille $(E_{i,i}, 1 \leq i \leq n)$ est une famille libre de $\ker(\varphi)$ donc $\ker(\varphi) = \text{vect}(E_{i,i}, 1 \leq i \leq n)$ donc $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des matrices diagonales.

5. Soit $M \in F_n$. On a $M \in \text{Im}(\varphi)$ donc $\exists X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = \varphi(X_0) = X_0 D - D X_0$.
 Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On a $M = X D - D X \Leftrightarrow \varphi(X) = \varphi(X_0) \Leftrightarrow \varphi(X) - \varphi(X_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \in \ker(\varphi)$ donc
 $M = X D - D X$ si et seulement si il existe une matrice diagonale Δ tel que $X = X_0 + \Delta$.

6. On reprend les notations de la partie précédente. On commence par chercher une matrice $X' = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

vérifiant $X' D - D X' = B'$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d & 2g \\ -b & 0 & h \\ -2c & -f & 0 \end{pmatrix} \text{ donc si } X' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } X' D - D X' = B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $X = P X' P^{-1}$ et $Y = P D P^{-1}$.

On a $XY - YX = (P X' P^{-1})(P D P^{-1}) - (P D P^{-1})(P X' P^{-1}) = P X' D P^{-1} - P D X' P^{-1}$

donc $XY - YX = P(X' D - D X') P^{-1} = P B' P^{-1} = B..$

Si on souhaite finir le calcul, la calculatrice donne $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } X = P X' P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -12 & 10 \\ -1 & -7 & 7 \\ -1 & -9 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } Y = P D P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2:

- Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $0 \leq \tan t \leq 1$ donc $u_n \geq 0$ et $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n (\tan t - 1) dt$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
 La suite $(u_n)_n$ est donc décroissante et est minorée par 0 donc la suite $(u_n)_n$ est convergente.
- On a $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et $u_1 = [-\ln(\cos t)]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln(2)$ et

$$u_2 = \int_0^{\pi/4} (\tan^2(t) + 1 - 1) dt = [\tan(t) - t]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} + u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n (\tan^2 t + 1) dt = \left[\frac{(\tan t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$$

On a donc $0 \leq u_n \leq u_{n+2} + u_n \leq \frac{1}{n+1}$ donc la suite (u_n) converge vers 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Par décroissance de la suite $(u_n)_n$, on obtient :

$$\frac{1}{n-1} = u_n + u_{n-2} \geq 2u_n \geq u_n + u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

On en déduit les inégalités demandées. Il en résulte que $u_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{2n}$.

On a $u_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{2n} > 0$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc la série $\sum u_n$ diverge.

5. Etude de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a D'après la question 3, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p+3} + u_{2p+1} = \frac{1}{2p+2}$.

En multipliant par $(-1)^p$, puis en sommant, on trouve que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p (u_{2p+3} + u_{2p+1}) = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{(-1)^p}{p+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} S_N$$

b Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p (u_{2p+3} + u_{2p+1}) &= \sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p u_{2p+3} + \sum_{p=0}^N (-1)^p u_{2p+1} = - \sum_{p=1}^N (-1)^{p-1} u_{2p+1} + \sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p u_{2p+1} \\ &= u_1 + (-1)^{N-1} u_{2N+1}. \end{aligned}$$

Comme la suite $(u_n)_n$ converge vers 0, il s'ensuit que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p (u_{2p+3} + u_{2p+1}) \right) = u_1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

On en déduit que la somme de la série proposée est $\ln 2$.

Exercice 3:

1. Si $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, alors $j^3 = e^{i2\pi} = 1$ et $1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$.

- Si $n = 3k$, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k} + j^{6k} = 1 + (j^3)^k + (j^3)^{2k} = 3$
- Si $n = 3k + 1$, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k+1} + j^{6k+2} = 1 + j + j^2 = 0$.
- Si $n = 3k + 2$, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k+2} + j^{6k+4} = 1 + j^2 + j^4 = 0$ car $j^4 = j^3 j = j$.

2. $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et est de somme e^z .

En posant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, on a $1 + e^j + e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(j^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + j^n + j^{2n}}{n!}$.

D'après la première question, il suffit de conserver dans la somme seulement les entiers n de la forme $3k$, avec $k \in \mathbb{N}$.

On a donc $1 + e^j + e^{j^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3}{(3k)!}$.

Or $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3} \left(1 + e^{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + e^{-\frac{1}{2}} \left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{e}} \right).$

COMPTE RENDU DU DM3

Remarques générales

- On peut utiliser la non colinéarité pour montrer que la famille est libre uniquement lorsque cette famille contient deux éléments.
- L'expression c'est-à-dire signifie équivalent.
Si vous l'utilisez, il faut vérifier que le lien logique marche dans les deux sens. Sinon utilisez donc.
- $x = 0$ n'est pas équivalent à $f(x) = 0$ même si f fait linéaire.
- Ne pas confondre la fonction f avec l'image d'un élément $f(x)$
- Pour calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire dont on connaît la matrice, le plus simple est encore de faire le produit de la matrice par le vecteur colonne coordonné de ce vecteur.
- L'intégrale d'une fonction positive entre des bornes dans le bon sens est positive.
- Une limite de suite ou de fonction est une constante on ne peut pas trouver une limite de suite qui dépend de n .

E 1

- Q4 : il est de loin plus simple de raisonner matriciellement à l'aide du résultat de la question 3.
(Les tentatives pour raisonner à partir du vecteur e sont en général fausses car e est un vecteur particulier mais très bien fait dans quelques copies).

Problème

- I1: on peut utiliser sans démonstration les résultats de cours sur la trace : sa linéarité et le fait que la trace d'un produit ne dépend pas du sens dans lequel est fait le produit.
- III 1 le plus simple pour montrer que la famille est une base est de calculer son déterminant dans la base canonique, d'autant qu'ici, on peut facilement développer par rapport à la première colonne.
- IV2: Mentionner une famille extraite d'une famille libre et libre pour justifier de la liberté de la famille extraite de la base canonique des matrices élémentaires.
- IV3: l'énoncé suggère fortement d'utiliser le fait que $\text{Im}(\varphi)$ est engendré par les images des vecteurs de la base des matrices élémentaires. Cela n'apparaît pas bien dans beaucoup de copies.
- IV4: beaucoup de démonstrations prétendent démontrer une égalité et ne démontrent qu'une inclusion.
Grâce à la question précédente on peut utiliser le théorème du rang et les dimensions pour conclure.
- IV 5: Refaire ce qui a été fait en cours sur les équations linéaires (pratiquement sans calcul)

E2

- la dérivée de $\tan$ est $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$ (dans cet exercice, $1 + \tan^2$ est plus naturel).
- Q3: Primitive de $u^n \times u'$ aurait dû être reconnue (sans intégration par parties).
- Q4: situation très courante dans laquelle utiliser la monotonie de la suite permet d'obtenir des inégalités.
A revoir si vous n'avez pas su le faire.
- Q5 dans beaucoup de copies le télescopage dans la Somme SN n'a pas été vu.