

PSI DS 1 (le 16 septembre 2026, 3h)

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Le sujet comporte 4 pages

Questions indépendantes proches du cours:

Q 1 Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

Q 2 Déterminer la nature de la série de terme général u_n avec:

$$a: u_n = \frac{n}{2^n}. \quad b: u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad c: u_n = \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}.$$

Q 3 Soit $a > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{1 + a^{2n}}$.

Q 4 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+2}$.

- Montrer que la série $\sum u_n$ converge. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Donner le signe de S

- Déterminer un rang à partir duquel $\left|S - \sum_{k=0}^n u_k\right| \leq 10^{-3}$.

Q 5 Soit $x \in \mathbb{C}$. En utilisant un produit de Cauchy, montrer que si $|x| < 1$ alors la série $\sum (n+1)x^n$ converge et $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$.

Q 6 Soit E l'ensemble des $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, vérifiant le système:
$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 2z - t = 0 \end{cases}.$$

1. (Sans résoudre le système)

Ecrire le système (S) sous forme matricielle. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et préciser la dimension de E .

2. Donner une base de E .

Exercice 1: Convergence et calcul d'intégrales généralisées (questions indépendantes)

Q 7 Justifier la convergence et calculer les intégrales généralisées $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x} dx$.

Q 8 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$ converge.

Q 9 Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{(t+2)\sqrt{1+t}}$.

1. Justifier l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{1+u^2} du$ et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 2:

On pose, pour $t \geq 2$, $f(t) = \frac{1}{t(\ln(t))^2}$ et pour $n \geq 3$, $v_n = \frac{1}{n(\ln(n))^2}$.

Q 10 Existe-t-il un réel $\alpha > 1$ tel que $f(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^\alpha} \right)$?

Q 11 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Q 12 On pose $S_n = \sum_{k=3}^n v_k$. Montrer que $S_n \leq \frac{1}{\ln(2)}$.

En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Q 13 Pour $n \geq 3$, on pose $u_n = \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

1. Montrer que $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2n}$.

2. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 3

Soit $\alpha > 0$ et $\alpha \neq \frac{1}{2}$. On pose $u_n = \sin \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^\alpha} \right)$

Q 14 On suppose $\alpha < \frac{1}{2}$. Donner un équivalent de u_n . En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Q 15 On suppose $\alpha > \frac{1}{2}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Q 16 Montrer que $\ker(f^2 + id_E)$ est stable par f , c'est-à-dire:

$$\forall x \in \ker(f^2 + id_E), f(x) \in \ker(f^2 + id_E).$$

Q 17 Soit g l'endomorphisme induit par f sur $F = \ker(f^2 + id_E) : g : \begin{cases} F \rightarrow F \\ x \mapsto g(x) = f(x) \end{cases}$.

Montrer que la dimension de $\ker(f^2 + id_E)$ est un entier pair

(on pourra préciser l'endomorphisme g^2 et prendre son déterminant).

On suppose maintenant que E de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

Q 18 Montrer que $\text{Im}(f) = \ker(f^2 + id_E)$.

Q 19 En déduire que $\dim(\ker(f^2 + id_E)) \neq 0$.

Q 20 Montrer que $\ker(f^2 + id_E) \oplus \ker(f) = E$.

Q 21 Soit $a \in \ker(f^2 + id_E)$ non nul.

Montrer que la famille $(a, f(a))$ est une famille libre du sous-espace vectoriel $\ker(f^2 + id_E)$.

Q 22 En déduire qu'il existe une base B_0 de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$. On suppose que $\forall i \in [0, n], P(i) \in \mathbb{Z}$.

Le but de l'exercice est de montrer que $\forall i \in \mathbb{Z}, P(i) \in \mathbb{Z}$.

(Les deux premières questions peuvent être considérées comme des questions de cours).

Q 23 Donner une famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ de polynômes de degré n vérifiant:

$$\forall (i, j) \in [0, n]^2, L_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Q 24 Justifier que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 25 Soit $i \in [0, n]$ et $k \in \mathbb{N}, k > n$. Montrer que $L_i(k) \in \mathbb{Z}$.

Q 26 En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}, P(k) \in \mathbb{Z}$.

Q 27 En utilisant le polynôme défini par $Q(X) = P(n - X)$, montrer que pour tout entier $i \in \mathbb{Z}, P(i) \in \mathbb{Z}$.

Suite: A ne traiter que si ce qui précède a été fait

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f(x) = (e^x - 1)^n$.

Q 28 Donner un équivalent simple de $f(x)$ en $x = 0$.

En déduire un développement limité de f à l'ordre n en $x = 0$.

Q 29 Calcul de $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$ pour $m \in [0, n]$.

a Soit $k \in \mathbb{N}$. Ecrire le développement limité de $x \mapsto e^{kx}$ au voisinage de $x = 0$ à l'ordre n .

b A l'aide d'une deuxième forme du développement limité de f à l'ordre n , montrer que $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$
et, si $m \in [0, n-1]$, $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = 0$.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.

Q 30 On suppose que $F + G = E$. Montrer qu'il existe une sous-espace vectoriel H de E tel que $E = F \oplus H$ et $E = G \oplus H$

(On pourra commencer par considérer une base de $F \cap G$).

Q 31 Etendre le résultat lorsqu'on n'a pas la condition $F + G = E$

CORRECTION DU DS1 (PSI)

Questions proches du cours :

R 1 Utiliser la règle de d'Alembert (vu en cours)

R 2 a: Si $u_n = \frac{n}{2^n}$ alors $\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^3}{2^n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ (CC) donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

b: $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge absolument.

c: Si $u_n = \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$ alors $\frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ si $\frac{3}{2} - \alpha > 0$. Si $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ SATP convergente donc $\sum u_n$ converge absolument. (On aurait pu choisir $\alpha = \frac{5}{4}$ a priori).

R 3 - Si $0 < a < 1$ alors $\frac{a^n}{1+a^{2n}} \sim_{n \rightarrow +\infty} a^n$ et la série $\sum a^n$ est une SATP convergente donc la série $\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ converge.

- Si $a = 1$ alors $\frac{a^n}{1+a^{2n}} = \frac{1}{2}$ donc la série $\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ diverge grossièrement.

- Si $a > 1$ alors $\frac{a^n}{1+a^{2n}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{a^{2n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ et la série $\sum \left(\frac{1}{a}\right)^n$ est une SATP convergente car $\frac{1}{a} < 1$ donc la série $\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ converge.

R 4 $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+2}$ donc $(-1)^n u_n > 0$. On a $|u_n| = \frac{1}{3n+2}$ donc $(-1)^n u_n > 0$ et $0 < 3n+2 < 3(n+1)+2$ donc $|u_n| > |u_{n+1}|$ donc $(|u_n|)$ est décroissante. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, la série $\sum u_n$ est spéciale alternée donc converge.

De plus $|u_n| \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ SATP divergente donc $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

$\sum u_n$ est spéciale alternée donc $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est du signe de $u_0 > 0$.

$\sum u_n$ est spéciale alternée donc $\left|S - \sum_{k=0}^n u_k\right| = |R_n| \leq |u_{n+1}|$ donc si $|u_{n+1}| \leq 10^{-3}$ alors $\left|S - \sum_{k=0}^n u_k\right| \leq 10^{-3}$. Or

$$|u_{n+1}| \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 3n+2 \geq 1000 \Leftrightarrow n \geq \frac{998}{3} \Leftrightarrow n \geq 332.$$

R 5 Soit $x \in \mathbb{C}$. On pose $u_n = v_n = x^n$. Le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est $\sum w_n$ avec $w_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = (n+1)x^n$. D'après le cours, $\sum u_n$ converge absolument et a pour somme $\frac{1}{(1-x)}$ et il en est

de même pour $\sum v_n$ donc $\sum w_n$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ donc $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$.

R 6 Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $\text{mat}_{(e_1, e_2)}(f) = A$ et $\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) = e_2 \end{cases}$. Posons $e'_1 = e_2$ et $e'_2 = e_1$.

On a $\begin{cases} f(e'_1) = e'_1 \\ f(e'_2) = 2e'_1 + e'_2 \end{cases}$ donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{mat}_{(e'_1, e'_2)}(f)$ sont semblables.

R 7 Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^4$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. On a $X \in E \Leftrightarrow AX = 0$ donc

$E = \ker(f)$ avec $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ X \mapsto AX \end{cases}$ application linéaire canoniquement associée à A . On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et que $\dim(E) + \text{rg}(f) = 4$. Or $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$ (C_1 et C_2 non colinéaires donc $\text{rg}(A) \geq 2$ et $\text{rg}(A) \leq 2$ nombre de lignes). On en déduit que $\dim(E) = 2$.

2: $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 2z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z - t \\ y = -z + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = -z + 2t \end{cases}$ avec $(z, t) \in \mathbb{R}^2$ quelconque donc

$$X \in E \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -3t \\ -z + 2t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $U = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a donc $E = \text{vect}(U, V)$ donc (U, V) est une famille génératrice de E

et est libre car échelonnée donc (U, V) est une base de E .

Exercice 1:

R 8 Les deux fonctions sont équivalentes à $\frac{1}{x^2} > 0$ en $+\infty$, ce qui permet de montrer la convergence de I_1 et I_2

• On a $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2 + 4} dx = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} dx.$

Le changement de variable de classe C^1 strictement croissant par $u(x) = \frac{x+1}{2}$ donne, sous réserve de convergence.

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_{u(0)}^{\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)} \frac{2}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

• $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2 + 2t} dt$. On a $\frac{1}{t^2 + 2t} = \frac{1}{t(t+2)}$. Or $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} = \frac{2}{t(t+2)}$

donc $F(x) = \frac{1}{2} \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} dt = [\ln(t) - \ln(t+2)]_1^x = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{t}{t+2}\right) \right]_1^x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow \frac{\ln(3)}{2}$

donc $I_2 = \frac{\ln(3)}{2}.$

R 9 Sous réserve de convergence, on fait une IPP avec $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, & u'(t) = \frac{-1}{2t^{\frac{3}{2}}} \\ v(t) = \sin(t), & v'(t) = \cos(t) \end{cases}$

On a $|u(t)v(t)| = \left| \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt = [u(t)v(t)]_0^{t \rightarrow +\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2t^{\frac{3}{2}}} dt.$

Or $\left| \frac{\sin(t)}{2t^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ converge absolument. donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2t^{\frac{3}{2}}} dt$ converge absolument. donc I_3 converge absolument.

R 10 $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+2)\sqrt{1+t}} dt.$

1. La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ et $f(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{3/2}} > 0$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+2)\sqrt{1+t}} dt$ est convergente donc I est convergente

2. Posons $u(t) = \sqrt{1+t}$. La fonction u est de classe C^1 et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = +\infty$ donc u réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]\sqrt{2}, +\infty[$ donc (chg^t var)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2}{(t+2)} \frac{1}{2\sqrt{1+t}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{1+u^2} du = 2 [\arctan(u)]_1^{+\infty} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2:

R 11 On a $\frac{1}{\frac{t(\ln(t))^2}{t^\alpha}} = \frac{t^{\alpha-1}}{\ln^2(t)} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} +\infty$ car $\alpha - 1 > 0$ (CC). donc

si $\alpha > 1$, on n'a pas $\frac{1}{t(\ln(t))^2} = o_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t^\alpha} \right)$.

R 12 Sous réserve de convergence, on pose $u(t) = \ln(t)$ (fonction strictement croissante et de classe C^1).

$$\int_2^{+\infty} f(t) dt = \int_2^{+\infty} \frac{u'(t)}{u^2(t)} dt = \int_{\ln(2)}^{\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)} \frac{1}{u^2} du = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{u^2} du \text{ qui est convergente donc } \int_2^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

$$\text{De plus, } \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{u^2} du = \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln(2)}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{\ln(2)}$$

R 13 On a, pour $k \geq 2$, pour $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \leq \frac{1}{t(\ln(t))^2} \leq \frac{1}{k(\ln(k))^2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt \leq \frac{1}{k(\ln(k))^2} \text{ donc pour } k \geq 3, \frac{1}{k(\ln(k))^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt.$$

On en déduit que $\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln(k))^2} \leq \int_2^n \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt$ (intégrale généralisée convergente d'une fonction positive).

La suite (S_n) des sommes partielles de la SATP $\sum v_n$ est majorée par $\frac{1}{\ln(2)}$ donc la série $\sum v_n$ converge.

R 14 On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n = \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

$$1. \text{ Quand } n \rightarrow +\infty, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} = e \times e^{-\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}$$

$$\text{donc } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \times \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right). \text{ On en déduit que } e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2n}.$$

$$2. \text{ De plus, au voisinage de } +\infty, \ln(n^2 + n) = \ln(n^2(1 + 1/n)) = 2 \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\text{Donc } \ln(n^2 + n) \underset{+\infty}{\sim} 2 \ln n.$$

$$\text{On en déduit que } u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{8} \times \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

Or, d'après la question précédente, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^2}$ converge.

Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

Exercice 3

R 15 Si $\alpha < \frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{\sqrt{n}} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right)$ donc $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^\alpha} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sin(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$ donc $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} > 0$. La SATP $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge donc $\sum u_n$ diverge.

R 16 Si $\alpha > \frac{1}{2}$, on a $\sin(x) = x + O_{x \rightarrow 0}(x^3)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^\alpha} \right) = 0$

donc $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^\alpha} + O_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^\alpha} \right)^3 \right)$.

Or $n > \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{n^\alpha} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ donc $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^\alpha} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

donc $O_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^\alpha} \right)^3 \right) = O_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) = O_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^3 \right)$ donc

$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^\alpha} + O_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right)$.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (CSSA) et la série $\sum O_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right)$ converge (comparaison avec Riemann)

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ donc la série $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$.

Exercice 4:

R 17 Soit $x \in \ker(f^2 + id_E)$. Montrons $f(x) \in \ker(f^2 + id_E)$, c'est-à-dire $(f^2 + id_E)(f(x)) = 0_E$.

On a $(f^2 + id_E)(f(x)) = f^3(x) + f(x) \stackrel{\text{linéarité}}{=} f(f^2(x) + x) \stackrel{x \in \ker(f^2 + id_E)}{=} f(0_E) \stackrel{\text{linéarité}}{=} 0_E$

donc $f(x) \in \ker(f^2 + id_E)$ donc $\ker(f^2 + id_E)$ est stable par f .

R 18 On peut donc considérer l'endomorphisme induit g sur $F = \ker(f^2 + id_E)$

Pour tout $x \in \ker(f^2 + id_E)$, $f^2(x) + x = 0_E$ donc $g^2(x) = -x$. On en déduit que $\boxed{g^2 = -id_F}$.

On en déduit $\det(g^2) = \det(-id_F) = (-1)^{\dim(F)}$. Or $\det(g^2) = \det(g)^2 \geq 0$ donc $\dim(F)$ est paire.

R 19 • Soit $x \in \ker(f^2 + id_E)$. On a $(f^2 + id_E)(x) = 0_E$ donc $x = -f^2(x) = f(-f(x)) \in \text{Im}(f)$ donc $\ker(f^2 + id_E) \subset \text{Im}(f)$.

• On a $f^3 + f = 0$ donc $(f^2 + id_E) \circ f = 0$ donc $\text{Im}(f) \subset \ker(f^2 + id_E)$

(exercice du cours $g \circ f = 0 \Rightarrow \text{Im}(f) \subset \ker(g)$ à éventuellement redétailler suivant le niveau de la copie).

On a donc bien $\text{Im}(f) = \ker(f^2 + id_E)$.

R 20 On a $f \neq 0_E$ donc $\ker(f) \neq E$ donc $\dim(\ker(f)) < \dim(E)$.

Or $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$ donc

d'après la question précédente, $\dim(\ker(f^2 + id_E)) = \dim(\text{Im}(f)) > 0$.

R 21 • Montrons $\ker(f^2 + id_E) \cap \ker(f) = \{0\}$. Soit $x \in \ker(f^2 + id_E) \cap \ker(f)$.

On a $f^2(x) = -x$ et $f^2(x) = f(f(x)) = 0$ donc $-x = 0$ donc $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

• On a (th du rang déjà vu) $\dim(\ker(f^2 + id_E)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$.

On en déduit que $\ker(f^2 + id_E) \oplus \ker(f) = E$.

R 22 Soit $a \in \ker(f^2 + id_E)$ non nul. Supposons que $\lambda a + \mu f(a) = 0 : (\mathcal{R}_1)$.

En appliquant f , On a $\lambda f(a) + \mu f^2(a) = 0$.

Or $(f^2 + id_E)(a) = 0$ donc $f^2(a) = -a$ donc $-\mu a + \lambda f(a) = 0$ ($\mathcal{R}_2$).

On en déduit $\lambda(\mathcal{R}_1) - \mu(\mathcal{R}_2) : (\lambda^2 + \mu^2)a = 0$ donc $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ car $a \neq 0$ et donc $\lambda = \mu = 0$ donc $(a, f(a))$ est libre.

R 23 On pose $F = \ker(f^2 + id_E)$ et g l'endomorphisme induit par u sur F : $v : \begin{cases} F \rightarrow F \\ x \mapsto v(x) = u(x) \end{cases}$

D'après la question précédente, $3 \geq \dim(\ker(f^2 + id_E)) \geq 2$ et on a vu précédemment $\dim \dim(\ker(f^2 + id_E))$ est paire donc $\dim(\ker(f^2 + id_E)) = 2$;

La famille $(a, f(a))$ est libre donc base de $\ker(f^2 + id_E) = \text{Im}(f)$. Soit b un vecteur non nul de $\ker(f)$ (de dimension 1 par le th du rang).

On a $\text{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$ donc $B = (a, f(a), b)$ est une base de E . On a $f(f(a)) = -a$ donc la matrice de f dans la base B est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5:

R 24 On vérifie que les polynômes définis par, $L_i = \frac{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (X - j)}{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (i - j)}$ répondent à la question (vu en cours).

R 25 La démonstration que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est identique à celle du cours.

R 26 $L_i(k) = \frac{k \times \dots \times (k - (i - 1)) \times (k - (i + 1)) \times \dots \times (k - n)}{i \times \dots \times 1 \times (-1) \times \dots \times (i - n)}$. Or $k \times \dots \times (k - (i - 1)) = \frac{k!}{(k - i)!}$,
 $(k - (i + 1)) \times \dots \times (k - n) = \frac{(k - i - 1)!}{(k - n - 1)!}$ donc $L_i(k) = (-1)^i \frac{k! (k - i - 1)!}{(k - i)! (k - n - 1)! (n - i)! i!}$. On a donc $L_i(k) = (-1)^i \frac{k!}{(k - i)! i!} \times \frac{(k - i - 1)!}{(k - n - 1)! (n - i)!} = (-1)^i \binom{k}{i} \times \binom{k - i - 1}{n - i} \in \mathbb{Z}$.

R 27 Donc il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{j=0}^n \lambda_j L_j$. En évaluant en $i \in [[0, n]]$, on obtient $\lambda_j = P(i)$.

On a donc $P = \sum_{j=0}^n P(j) L_j$

Si $k > n$, alors $P(k) = \sum_{i=0}^n P(i) L_i(k) \in \mathbb{Z}$ d'après l'hypothèse $P(i) \in \mathbb{Z}$ et $L_i(k) \in \mathbb{Z}$ d'après la question précédente donc $P(k) \in \mathbb{Z}$.

R 28 Si $i \in [[0, n]]$ alors $-n \leq -i \leq 0$ donc $0 \leq n - i \leq n$ donc $Q(i) = P(n - i) \in \mathbb{Z}$ et $\deg(Q) = \deg(P) \leq n$. On peut appliquer le résultat de la question précédente à Q : $\forall k > n, Q(k) \in \mathbb{Z}$.

Soit $k < 0$. Montrons $P(k) \in \mathbb{Z}$. On a $P(k) = Q(n - k) \in \mathbb{Z}$ car $n - k > n$ donc $P(k) \in \mathbb{Z}$.

On a donc $\forall k \in \mathbb{Z}, P(k) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6:

R 29 On a $f(x) = (e^x - 1)^n$. On a $e^x - 1 \sim_{x \rightarrow 0} x$ donc $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} x^n$ donc $f(x) = x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.

R 30 a En substituant x par kx dans le DL en 0 de l'exponentielle, $e^{kx} = \sum_{m=0}^n \frac{(kx)^m}{m!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.

b D'après la formule du binôme, $f(x) = (e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{kx} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\sum_{m=0}^n \frac{(kx)^m}{m!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \right)$

donc $f(x) = \sum_{m=0}^n \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^m}{m!} \right) x^m + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.

Posons $a_m = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^m}{m!}$. On a $f(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^m + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = 0 + 0 \times x + \dots + 0 \times x^{n-1} + 1 \times x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$

d'après la première question, par unicité du DL de f en 0, $a_n = 1$ et $a_m = 0$ si $m \in [0, n-1]$, ce qui entraîne le résultat demandé.

Exercice 7:

R 31 Posons $r = \dim(F) = \dim(G) = r$.

Considérons une base $(e_1, \dots, e_k)$ de $F \cap G$, complétée en $(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_r)$ base de F et en $(e_1, \dots, e_k, g_{k+1}, \dots, g_r)$ base de G .

Posons $H = \text{vect}(f_{k+1}, g_{k+1}, \dots, f_r + g_r)$.

Montrons que $E = F \oplus H = G \oplus H$.

Les transformations $u_i \leftarrow u_i + \lambda u_j$ ($i \neq j$) ne changent pas l'espace vectoriel engendré par $(u_1, \dots, u_n)$ donc

On a $\text{vect}(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_r, f_{k+1} + g_{k+1}, \dots, f_r + g_r) = \text{vect}(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_r, g_{k+1}, \dots, g_r)$.

donc $F + H_1 = F + G = E$. (la juxtaposition de familles génératrices de deux sev est génératrice de la somme).

De même $\text{vect}(e_1, \dots, e_k, f_{k+1} + g_{k+1}, \dots, f_r + g_r, g_{k+1}, \dots, g_r) = \text{vect}(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_r, g_{k+1}, \dots, g_r)$

donc $G + H_1 = F + G = E$.

De plus, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2r - k = \dim(F) + \dim(H_1) = \dim(G) + \dim(H_1)$ donc les sommes $F + H_1$ et $G + H_1$ sont directes ce qui entraîne que F et G ont un supplémentaire commun H_1 dans $F + G$.

R 32 En prenant H_2 supplémentaire de $F + G$ dans E ,

on a $E = (F + G) \oplus H_2 = (F \oplus H_1) \oplus H_2 \stackrel{\text{laissé au lecteur}}{=} F \oplus (H_1 \oplus H_2)$ donc $H_1 \oplus H_2$ est un supplémentaire de F dans E et, pour la même raison, un supplémentaire de G dans E .