

DM 4, pour le 2/10/26

EXERCICE 1: Résolution d'équation différentielle avec les séries entières

Soit $R > 0$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ admet R pour rayon de convergence. On pose, pour $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que f est une fonction paire si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$. Donner sans démonstration une condition nécessaire et suffisante pour que f soit impaire.
2. Justifier que f est de classe C^2 sur $]-R, R[$. On suppose que

$$\forall x \in]-R, R[, f''(x) + 2xf'(x) + 2f(x) = 0 : (\mathcal{E})$$

- (a) Montrer qu'il existe des réels u et v tels que $\forall n \in \mathbb{N}, (un + v)a_{n+2} + 2a_n = 0$.
 - (b) Exprimer a_{2n} en fonction de a_0 et a_{2n+1} en fonction de a_1 . (on donnera des expressions faisant intervenir des factorielles et des puissances).
 - (c) On suppose que $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Exprimer $f(x)$ en fonction de x à l'aide de fonctions usuelles et préciser la valeur de R dans ce cas. On note f_0 cette fonction.
 - (d) On suppose que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Préciser la valeur de R dans ce cas (on ne cherchera pas à exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles). On note f_1 cette fonction.
3. Justifier que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est un espace vectoriel de dimension 2 de base (f_1, f_2) .

PROBLEME:

Les quatre parties sont dans une large mesure indépendantes.

Soit I un intervalle et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction f est absolument monotone sur I si et seulement si

$$f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I. \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Préliminaire:

On suppose que $0 \in I$.

Q1: Soit u une fonction de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$ et $x \in I$.

$$\text{Montrer que } \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} u(t) dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} u(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} u'(t) dt.$$

Q2: En déduire que si f est une fonction de classe C^{n+1} de I dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Remarque Cette relation est appelée formule de Taylor avec reste intégral.

Première partie:

- Q3:** Montrer que la somme de deux fonctions absolument monotones sur I est absolument monotone sur I .
- Q4:** Montrer que le produit de deux fonctions absolument monotones sur I est absolument monotone sur I (on utilisera la formule de Leibnitz).
- Q5:** On suppose que f est une fonction absolument monotone sur I . On pose, pour $x \in I$, $g(x) = e^{f(x)}$. Montrer que g est absolument monotone sur I (on pourra utiliser la relation $g'(x) = f'(x)g(x)$).
- Q6:** Soit f_1 la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f_1(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$. Justifier que f_1 est de classe C^∞ et calculer $f_1^{(n)}(x)$. Montrer que f_1 est absolument monotone sur $]0, 1[$.
- Q7:** Soit f_2 la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $h = \ln(f_2)$. Calculer $h'(x)$. En déduire que h et f_2 sont absolument monotones sur $]0, 1[$.
- Q8:** Montrer que l'application arcsinus est absolument monotone sur $]0, 1[$.

Deuxième partie:

Soit $a > 0$ et f une fonction de $[0, a[$ dans $\mathbb{R}$ absolument monotone sur $[0, a[$.

On pose, pour $x \in [0, a[$, $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

- Q9:** Montrer que, pour tout $x \in]0, a[$, $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du$.
- Q10:** En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ est croissante sur $]0, a[$.
- Q11:** Montrer que, pour tout $x \in]0, a[$, $0 \leq R_n(x) \leq f(x)$.
- Q12:** Déduire des deux questions précédentes que si $0 < x < y < a$, alors $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.
- Q13:** Soit $x \in [0, a[$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$.
- Q14:** Montrer pour tout $x \in [0, a[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ (on dit que f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0).

Troisième partie:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- Q15:** Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Q16:** Justifier que la fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$.
- Q17:** Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- Q18:** Justifier que la fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
- Q19:** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$$

(on précisera une relation entre P_n et P_{n+1} et on justifiera précisément que P_n est un polynôme).

Q20: Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^{3n}} = 0$. En déduire que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de $f^{(n)}(0)$.

Q21: La fonction f est-elle la somme de sa série de Taylor en 0?

Quatrième partie: série de Taylor de la fonction tangente et programme python.

Soit la fonction f de classe C^∞ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définie par $f(x) = \tan(x)$ et $n \in \mathbb{N}$.

Q22: En utilisant la relation $f' = 1 + f^2$ et la formule de Leibnitz, exprimer $f^{(n+1)}$ en fonction $f, f', \dots, f^{(n)}$.

Q23: En déduire que f est absolument monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Q24: Dans la suite du problème, on pose $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$.

Ecrire un programme python d'argument un entier n qui renvoie la liste $[a_0, \dots, a_n]$.

Q25: On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. On suppose que $0 < x < \frac{\pi}{8}$. En utilisant $y = \frac{\pi}{4}$, Montrer à l'aide de la question 12 que $|\tan(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Q26: Ecrire un programme python qui permet d'obtenir une valeur approchée de $\tan\left(\frac{1}{4}\right)$ à 10^{-9} près (on pourra chercher à limiter le nombre de multiplications et utiliser l'égalité $2^{10} = 1024$).

CORRECTION DU DM4

EXERCICE 1:

1. Exo fait en cours.
2. f est DSE donc est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et on peut dériver terme à terme la série entière sur $] -R, R[$

(a) donc si $x \in] -R, R[$, alors $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$. On a donc

$$\begin{aligned} f''(x) + 2x f'(x) + 2f(x) &= 0 \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} + 2n a_n + 2a_n) x^n = 0 \\ \text{unicité du DSE} &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1) a_{n+2} + (2n+2) a_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n+2) a_{n+2} + 2a_n = 0 \end{aligned}$$

(b) On a donc $a_{2n} = \frac{-2}{2n} a_{2n-2} = \frac{-2}{2n} \frac{-2}{2n-2} a_{2n-4} = \frac{-2}{2n} \frac{-2}{2n-2} \frac{-2}{2n-4} \cdots \frac{-2}{4} \frac{-2}{2} a_0 = \frac{(-1)^n}{n!} a_0$
 et $a_{2n+1} = \frac{-2}{2n+1} a_{2n-1} = \frac{-2}{2n+1} \frac{-2}{2n-1} a_{2n-3} = \frac{-2}{2n+1} \frac{-2}{2n-1} \cdots \frac{-2}{5} \frac{-2}{3} a_1$
 donc $a_{2n+1} = (-1)^n 2^n \frac{(2n)(2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2n+1)!} a_1 = (-1)^n 2^{2n} \frac{n!}{(2n+1)!} a_1$.

(c) On a $a_0 = 1$ donc $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}$ et $a_1 = 0$ donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$. On en déduit que si $x \in] -R, R[$ $f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = e^{-x^2}$. Le développement en série entière de l'exponentielle étant de rayon de convergence $+\infty$, la fonction f_0 est définie sur $\mathbb{R}$ et le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$.

(d) On a $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = (-1)^n 2^{2n} \frac{n!}{(2n+1)!}$. Posons pour $x \neq 0$, $u_n = a_{2n+1} x^{2n+1}$. On a $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{a_{2n+2} x^{2n+3}}{a_{2n+1} x^{2n+1}} \right| = \frac{2}{2n+3} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la série $\sum u_n$ converge pour tout x et donc la série entière $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ admet un rayon de convergence égal à $+\infty$.

3. L'équation est homogène d'ordre 2 sous forme normalisée et à coefficients continus donc l'ensemble des solutions est de dimension 2.

Or (f_0, f_1) est une famille libre de solutions (évaluer en 0 l'égalité $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0$ donne $\lambda_0 = 0$).

Problème:

Préliminaire:

Q1: La fonction u est de classe C^1 . Posons $v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. On a $v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$ et intégrons par parties:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} u(t) dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} u(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} u'(t) dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} u(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} u'(t) dt.$$

Q2: Montrons le résultat par récurrence sur n :

Initialisation: $n = 0$: Si f est C^1 alors $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$

$$\text{donc } f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t) dt.$$

Hérédité: Supposons la propriété vraie pour n et montrons la pour $n+1$: Soit f une fonction de classe C^{n+2} de I dans $\mathbb{R}$. La fonction f est de classe C^{n+1} donc, (HR),

pour tout $x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ et en appliquant la question 1 à la fonction $u = f^{(n+1)}$ (qui est bien C^1 car f est $C^{(n+2)}$),

on a $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$. On en déduit que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$$

$$\text{donc } f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt.$$

Première partie:

Q3: Supposons f et g absolument monotones sur I .

Posons $h = f + g$. La fonction h est C^∞ car f et g sont C^∞ . De plus,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$ donc h est absolument monotone sur I .

Q4: Posons $k = f \times g$. De même k est C^∞ car f et g sont C^∞ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{on a } k^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \geq 0 \text{ donc } k \text{ est absolument monotone sur } I.$$

Q5: La fonction g est C^∞ car f est C^∞ . Montrons par récurrence forte sur n que $g^{(n)} \geq 0$.

- C'est vrai pour $n = 0$ car $g^{(0)}(x) = g(x) = e^{f(x)} \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Supposons que les fonctions $g, g', \dots, g^{(n)}$ sont positives sur I . Montrons que $g^{(n+1)} \geq 0$.

On a $g(x) = e^{f(x)}$. donc $g'(x) = f'(x) e^{f(x)}$. On a donc $g' = f'g$. La formule de Leibnitz donne

alors $g^{(n+1)} = (g')^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} \geq 0$ (HR et f est absolument monotone), ce qui achève la récurrence.

Q6: Soit f_1 la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f_1(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$.

La fonction f_1 est de classe C^∞ comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^∞ .

$$\text{Posons } u(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}.$$

$$\text{On a } u'(x) = -1 \times (1+x)^{-2}, u''(x) = (-1) \times (-2) \times (1+x)^{-3}, \dots,$$

$$\text{et finalement } u^{(n)}(x) = (-1) \times (-2) \times \dots \times (-n) \times (1+x)^{-(n+1)}$$

$$\text{De même si } v(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}. \text{ On a}$$

$$v'(x) = (-1) \times (-1) (1-x)^{-2} = (1-x)^{-2}, v''(x) = (-1) \times (-2) \times (1-x)^{-3} = 2 \times (1-x)^{-3}, \dots,$$

$$v^{(n)}(x) = 2 \times \dots \times n \times (1-x)^{-(n+1)}$$

$$\text{On en déduit que } f_1^{(n)}(x) = \frac{n!}{2} \left((1-x)^{-(n+1)} - (-1)^n (1+x)^{-(n+1)} \right) = \frac{n!}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{(n+1)}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{(n+1)}} \right).$$

Si $x \in]0, 1[$ alors $1-x > 0$ et $1+x > 0$ donc si n est impair, $f_1^{(n)}(x) > 0$.

$$\text{Si } n \text{ est pair, } f_1^{(n)}(x) = \frac{n!}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{(n+1)}} - \frac{1}{(1+x)^{(n+1)}} \right).$$

Comme $0 < 1 - x < 1 + x$, on a $0 < (1 - x)^{n+1} < (1 + x)^{n+1}$ donc $0 < \frac{1}{(1 + x)^{(n+1)}} < \frac{1}{(1 - x)^{(n+1)}}$ donc $f_1^{(n)}(x) > 0$. donc f_1 est absolument monotone sur $]0, 1[$.

Q7: Soit f_2 la fonction définie sur $]0, 1[$. par $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On a $h(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x)$ donc $h'(x) = f_1(x)$.

Si $x \in]0, 1[$, on a $h(x) \geq 0$ car $0 < \sqrt{1-x^2} < 1$ donc $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1$ et $h' = f_1$ est absolument monotone donc

pour tout $n \geq 0$, $(h')^{(n)} = h^{(n+1)}$ positive sur $]0, 1[$ donc $\forall n \geq 1$, $h^{(n)} \geq 0$ est positive sur $]0, 1[$.

On en déduit que h est absolument monotone.

Comme $f_2 = e^h$ avec h absolument monotone sur $]0, 1[$, on en déduit que f_2 est absolument monotone sur $]0, 1[$.

Q8: Pour tout $x \in]0, 1[$, $\arcsin(x) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\arcsin(x) \geq 0$. De plus, en posant $f = \arcsin$ on a $f' = f_2$ donc f' est absolument monotone sur $]0, 1[$ donc arcsinus est absolument monotone sur $]0, 1[$.

Deuxième partie:

Q9: Soit $x > 0$ et $R_n(x) = \int_0^x \frac{x^n (1 - \frac{t}{x})^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$. Le changement de variable $u = \frac{t}{x}$

donne $R_n(x) = \int_0^1 \frac{x^n (1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) \times x du$ d'où le résultat.

Q10: Si $0 < x \leq y$ alors pour tout $u \in [0, 1]$, $0 < xu \leq yu$ donc $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(yu)$ car $f^{(n+2)} \geq 0$ donc $f^{(n+1)}$ est croissante.

On en déduit que $\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(yu) du$

donc $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$ donc la fonction $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ est croissante sur $]0, a[$.

Q11: Si $x \in]0, a[$, $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \geq 0$ car, pour $t \in [0, x]$, $f^{(n+1)}(t) \geq 0$ et $\frac{(x-t)^n}{n!} \geq 0$.

De plus, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$ et $\forall k$, $f^{(k)}(0) \geq 0$ donc

$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \geq 0$ donc $R_n(x) \leq f(x)$.

Q12: On suppose $0 < x < y < a$. D'après Q10 et Q11, $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}} \leq \frac{f(y)}{y^{n+1}}$ donc $R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.

L'inégalité $0 \leq R_n(x)$ découle de Q11.

Q13: Soit $x \in [0, a[$. Soit $y \in]x, a[$. On a $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.

Comme $0 < \frac{x}{y} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = 0$ donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$.

Q14: Pour tout $x \in [0, a[$ on a $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$. et $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$.

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right) = f(x)$ donc $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Troisième partie:

Q15: La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues.

De plus $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

Q16: La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions de classe C^1 . On a $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Q17: On a $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 2X^{\frac{3}{2}} e^{-X}$ avec $X = \frac{1}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc, comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^{\frac{3}{2}} e^{-X} = 0$ (C.C) on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f'(x) = 0$. La fonction f étant continue en 0, le théorème "limite de la dérivée" permet d'en déduire que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f'(x) = 0$. Cette égalité traduit la continuité de f' en 0 donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q18: La fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions de classe C^∞ .

Q19: Les polynômes $P_0 = 1$ et $P_1 = 2$ vérifient l'égalité demandée. Supposons que pour un certain n , on ait

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$ avec P_n polynôme. On a alors

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P'_n(x)}{x^{3n}} - 3n \times \frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} \right) f(x) + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f'(x) = \left(\frac{P'_n(x)}{x^{3n}} - 3n \times \frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \frac{2}{x^3} \right) f(x)$$

$$\text{donc } f^{(n+1)}(x) = \frac{x^3 P'_n(x) + (-3nx^2 + 2) P_n(x)}{x^{3n+3}} f(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}} f(x)$$

avec $P_{n+1}(x) = x^3 P'_n(x) + (-3nx^2 + 2) P_n(x)$ qui résulte d'opérations sur des polynômes donc est un polynôme. Ce qui montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$.

Q20: On a $\frac{f(x)}{x^{3n}} = \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{3n}{2}} e^{-\frac{1}{x^2}} = X^{\frac{3n}{2}} e^{-X}$ avec $X = \frac{1}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc, comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^\alpha e^{-X} = 0$ (C.C)

on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{f(x)}{x^{3n}} = 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f^{(n)}(x) = 0$. Cela permet de montrer par récurrence sur n que f est dérivable n fois en 0 et que $f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f^{(n)}(x) = 0$ en utilisant le théorème limite de la dérivée et que $f^{(n)}$ est continue en 0. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Q21: On a donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \neq f(x)$ si $x \neq 0$. donc la fonction f n'est pas la somme de sa série de Taylor en 0.

Quatrième partie: série de Taylor de la fonction tangente et programme python.

Q22: On a $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ donc $f' = 1 + f^2$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

la formule de Leibnitz donne $f^{(n+1)} = (f')^{(n)} = (f \times f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$.

Q23: Récurrence forte:

- Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a $f^{(n)} \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $f^{(k)} \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

La relation $f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$ entraîne que $f^{(n+1)} \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que f est absolument monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Q24: Si $n \geq 1$, $f^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)}(0) f^{(n-k)}(0)$ donc $\frac{f^{(n+1)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) f^{(n-k)}(0)}{k!(n-k)!}$ et donc

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

```
def liste_an[n]:
    if n==0:
        return [0]
    L=[0,1]
    for i in range(1,n):
        a=0
        for k in range(i+1):
            a=a+L[k]*L[i-k]
        L.append(a/(n+1))
    return L
```

Q25: En prenant $0 < x < \frac{\pi}{8}$ et $y = \frac{\pi}{4}$ On a $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ car $\frac{x}{y} \leq \frac{1}{2}$

donc $|R_n(x)| = |\tan(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$

Q26: On a $2^{10} = 1024 \geq 10^3$ donc $2^{30} \geq 10^9$ donc $S_{29}\left(\frac{1}{4}\right)$ est une valeur approché de $\tan\left(\frac{1}{4}\right)$ à 10^{-9} près.

```
L=liste_an(29)
x,S=1,0
for i in range(30):
    S=S+L[i]*x
    x=x/4
print(S)
```

COMPTE RENDU DU DM4

Remarques générales

- Les récurrences fortes doivent être annoncées et bien rédigées
- Les croissances comparées utilisées doivent être claires

E1

- 2c: reconnaître la série exponentielle
- 2d: utiliser la relation de récurrence du 2a facilite l'application de la règle de d'Alembert
- 3 théorème de structure pour les équations homogènes!!

Pb:

- 2: **Le résultat est donné: rédigez la récurrence proprement!**
initialisation: $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$
- 5 et 23 récurrence **forte**
- 7 pour ceux qui ont dérivé terme à terme (inutile), attention aux bornes de la somme!
- 10 ne pas passer par la dérivée: $u \leq v \implies \dots \implies H(u) \leq H(v)$ par le calcul sur inégalités.
- 17 et 20 bien écrire la croissance comparée à laquelle on se ramène
- 20 récurrence indispensable pour la fin de la question.