

PSI DS 2 (le 7 octobre 2026, 4h)

- Les solutions devront être présentées **dans l'ordre de l'énoncé** (quitte à laisser des blancs pour compléter plus tard), rédigées avec une **encre foncée**.
- Ce qui est écrit sur une page ne devra pas dépasser sur la page située à côté.
- Chaque fois que le résultat d'une question précédente sera utilisé (ce qui est possible même si la question n'a pas été traitée), le **numéro de cette question devra être mentionné clairement**.
- Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- **Les calculatrices sont interdites**

Le sujet comporte 5 pages

Questions indépendantes proches du cours:

Q 1 Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques réelles de taille 3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

Q 2 Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{3n+2}}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Q 3 Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{\sqrt{n+1}} x^{2n}$.

Q 4 Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières $\sum nx^n$ et $\sum n^2 x^n$ (pour x réel).

Q 5 Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{e^x - 1} \end{cases}$ admet un prolongement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q 6 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $m_{1,1} = \frac{1}{2}$, $m_{2,2} = \frac{1}{3}$ et $\forall i \in [[1, n]]$, $m_{i,i} \in \mathbb{Z}$.
Montrer que M n'est pas une matrice de projecteur.

Exercice 1:

Q 7 Justifier que la fonction arctangente est développable en série entière sur un intervalle ouvert que l'on précisera et donner ce développement.

Q 8 Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$ et préciser la somme de cette série entière.

Exercice 2:

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \ln(1+x+x^2)$

Q 9 Justifier que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.

Q 10 On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{a}{x-j} + \frac{b}{x-j^2}$.

Q 11 En déduire une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Problème 1:

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \quad (E)$$

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \quad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $R > 0$. On définit la fonction $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q 12 Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

Q 13 Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

Q 14 Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $] -R, R[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 15 En déduire que la valeur de R et montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$$

Q 16 Les solutions de l'équation (H) sont-elles toutes développables en série entière sur $]0, 1[$?

Partie II - Solution de (E) sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

Dans cette partie, on désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

On pose, pour $x \in I$, $\varphi(x) = \frac{x}{1-x}$.

D'après la première partie, la fonction φ est solution de (H) sur $]0, 1[$.

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \frac{y(x)}{\varphi(x)} \text{ c'est-à-dire } y(x) = \varphi(x) \times z(x).$$

Q 17 Justifier que φ est solution de (H) sur $]1, +\infty[$.

Q 18 Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I , puis exprimer y , y' et z'' à l'aide des fonctions z et φ .

Q 19 Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x. \quad (E_1)$$

Q 20 Montrer que si z est solution de (E_1) sur I , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

Q 21 En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I .

Partie III - Solution de (E) sur $]0, +\infty[$ (recollement)

Q 22 Montrer que la fonction g_1 définie sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$ par $g_1(h) = \frac{\ln(1+h)}{h}$ admet un prolongement de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.

En déduire que la fonction définie sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$ admet un prolongement de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Q 23 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.

Problème 2:

Le problème est composé de trois parties qui ne sont pas indépendantes. On pourra admettre les résultats des questions de ce problème en les précisant dans la copie.

Etant donné un réel μ , on considère l'équation différentielle (E_μ) suivante :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0 \quad (E_\mu)$$

dont on cherche des fonctions solutions y sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

I Partie I - Résolution dans le cas où $\mu = 0$

Dans cette partie, on suppose $\mu = 0$, on cherche donc à résoudre sur $]0, 1[$ l'équation

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' = 0. \quad (E_0)$$

Q 24 Soit $f : x \mapsto \arcsin(2x - 1)$. Montrer que f est définie et continue sur le segment $[0, 1]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, 1[$.

Q 25 Justifier que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{16x-8}{16(x^2-x)} = \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}$.

Q 26 En déduire les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$.

II Partie II - Recherche d'une solution particulière dans le cas $\mu \neq 0$

On suppose $\mu \neq 0$.

Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Q 27 Montrer que y vérifie (E_μ) si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} [(16n^2 - \mu) a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}] x^n = 0$.

On supposera dorénavant que y est solution de (E_μ) .

Q 28 Donner une expression de a_n en fonction de a_0 .

Q 29 On suppose $a_0 = 0$. Donner une expression simple de y et préciser son rayon de convergence.

Q 30 On suppose $a_0 \neq 0$ et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mu = 16p^2$.
Montrer que y est polynomiale et préciser son degré.

Q 31 Si $a_0 \neq 0$ et il n'existe pas d'entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mu = 16p^2$. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Q 32 Déterminer les solutions de (E_μ) développables en série entière.

Q 33 Existe-t-il des solutions de (E_μ) non développables en série entière?

III Partie III - Etude aux bornes de $]-R, R[$ d'une solution particulière

On se place dans le cas où $a_0 = 1$ et $\mu = 1$.

Soit ϕ la fonction définie sur l'intervalle $]-R, R[$ par la relation :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par les relations $(\mathcal{R}_n)$ et R est le rayon de convergence obtenu à la question précédente.

Q 34 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{-(4n)!}{4^{2n} \times ((2n)!)^2 \times (4n-1)}$.

Q 35 En déduire que $a_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{4\sqrt{2\pi n^{3/2}}}$.

Q 36 Etudier la convergence de la série $\sum a_n x^n$ en $x = R$ et $x = -R$.

Exercice 3

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.

Q 37 Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$.

Q 38 Montrer que f est définie sur $I =]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$.

Q 39 Prouver que f vérifie: $\forall x \in I, y'(x) = y^2(x) : (\mathcal{E})$.

Q 40 Montrer qu'il existe un réel $r \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$ tel que $\forall x \in]-r, r[, f(x) = \frac{3}{1-3x}$.

Q 41 En déduire la valeur de u_n pour tout entier naturel n .

Exercice 4

Soit $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des complexes.

Q 42 Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 + x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & & x_2 y_n \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & \cdots & & 1 + x_n y_n \end{pmatrix}$.

Indication: on pourra s'intéresser à la matrice $M - I_n$.

CORRECTION DU DS2 (PSI)

Questions proches du cours :

R 1 Utiliser la règle de d'Alembert (vu en cours).

R 2 On a $\frac{z^{3n+2}}{n!} = z^2 \times \frac{(z^3)^n}{n!}$ et $\sum \frac{(z^3)^n}{n!}$ est la série exponentielle prise en z^3 qui converge pour $z \in \mathbb{R}$.

R 3 Si $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{3^n}{\sqrt{n+1}} x^{2n}$.

On a $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| 3 \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} x^2 \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |3 \times x^2| \begin{cases} < 1 \text{ si } |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et la série CV} \\ > 1 \text{ si } |x| > \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et la série DV} \end{cases} \text{ donc } R = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

R 4 fait en cours.

R 5 La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}^*, \text{ on a } f(x) = \frac{sh(x)}{e^x - 1} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}}.$$

$$\text{Posons } u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \text{ et } v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Les fonctions u et v sont DSE donc C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a $v(0) = 1$ et $xv(x) = e^x - 1 \neq 0$ si $x \neq 0$ donc v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $\frac{u}{v}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et prolonge f .

R 6 Si M est une matrice de projecteur, d'après le cours $\text{tr}(M) = \text{rg}(M)$.

Or d'après les hypothèses, $\text{tr}(M) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $\text{tr}(M) \notin \mathbb{Z}$ donc $\text{tr}(M) \neq \text{rg}(M)$ donc M n'est pas la matrice d'un projecteur.

Exercice 1:

R 7 Voir cours: $\forall x \in]-1, 1[, \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et cette série entière est de rayon de convergence $R = 1$.

R 8 Soit F la primitive de $\arctan$. vérifiant $F(0) = 0$. D'après le cours, par intégration terme à terme,

$$\forall x \in]-1, 1[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$$\text{Or } F(x) = \int_0^x \arctan(t) dt = [t \arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$

Exercice 2

R 9 $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x + x^2 > 0$ (car $\Delta < 0$). La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x+1}{1+x+x^2}$.

R 10 On a $1 + x + x^2 = (x-j)(x-j^2)$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\frac{a}{x-j} + \frac{b}{x-j^2} = \frac{(a+b)x - aj^2 - bj}{1+x+x^2}$.

Le système $\begin{cases} a+b=2 \\ -aj^2 - bj=1 \end{cases}$ a pour solution $(a,b) = (1,1)$ donc $f'(x) = \frac{1}{x-j} + \frac{1}{x-j^2}$.

R 11 On a donc $f'(x) = \frac{-j^2}{1 - \frac{x}{j}} + \frac{-j}{1 - \frac{x}{j^2}} (\text{car } j^3 = 1)$.

Si $|x| < 1$, alors $f'(x) = \frac{-j^2}{1 - \frac{x}{j}} + \frac{-j}{1 - \frac{x}{j^2}} = -j^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{j}\right)^n - j \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{j^2}\right)^n$ donc

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-j^{2n+2} - j^{n+1}) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -2 \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) x^n \text{ car } j^2 = \bar{j}$$

donc $j^{2n+2} - j^{n+1} = \overline{j^{n+1}} + j^{n+1} = 2 \operatorname{Re}(j^{n+1})$.

Le théorème d'intégration terme à terme des séries entières entraîne que

$$f(x) = f(0) - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Problème 1:

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

R 12 f est la somme d'une série entière de rayon $R > 0$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R; R[$ et on peut dériver terme à terme à tout ordre; en particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -R; R[$ et, pour $x \in] -R; R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

par propriété des séries entières, ces deux séries sont aussi de rayon R .

R 13 On a donc, pour $x \in] -R; R[$,

$$x^2 f''(x) = \sum_{n=2 \rightarrow 1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$$

$$x^3 f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n$$

$$x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$$

$$x^2 f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} = \sum_{n=2 \rightarrow 1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) \\ = & a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - na_n - (n-1)a_{n-1} + a_n] x^n \\ = & a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n^2 - 2n + 1)a_n - (n^2 - 3n + 2 + n - 1)a_{n-1}) x^n \\ = & a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) x^n. \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, $(n - 1)^2 = 0$ donc, si on pose, pour $n \geq 2$, $b_n = (n - 1)^2$, on a

$$x^2(1 - x)f''(x) - x(1 + x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$$

R 14 Par unicité d'un développement en série entière sur $] -R, R[$,

$$\forall x \in] -R, R[, a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0x^n \text{ si et seulement si } a_0 = 0 \text{ et, pour tout } n \geq 2,$$

$$b_n(a_n - a_{n-1}) = 0$$

Donc, d'après la question précédente, f est solution de (H) si et seulement si $a_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 2$, $b_n(a_n - a_{n-1}) = 0$.

Or pour $n \geq 2$, $b_n \neq 0$ donc, on obtient après changement d'indice,

f est solution de (H) sur $] -R; R[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n$.

R 15 La série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est de rayon 1 donc on peut prendre $R = 1$ et en posant $\lambda = a_1$, pour $x \in] -1; 1[$,

$$f(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \lambda x \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \lambda x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\lambda x}{1 - x}$$

R 16 Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{\lambda x}{1 - x}$ est solution de (H) sur $] -1; 1[$ (raisonnement par équivalence dans les questions précédentes).

Or sur $]0; 1[$, (H) $\Leftrightarrow y'' - \frac{x(1+x)}{x^2(1-x)}y' + \frac{1}{x^2(1-x)}y = 0$ équation homogène normalisée à coefficients continus dont l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 et l'ensemble des solutions DSE est $\text{vect} \left(x \mapsto \frac{\lambda x}{1 - x} \right)$ qui est de dimension 1 donc il existe des solutions non DSE.

Partie II - Solutions de (E) sur $]0; 1[$ ou $]1; +\infty[$

(cette partie met en oeuvre une méthode vue en exercice de cours: utiliser une solution connue pour faire un changement de fonction inconnue)

R 17 On a déjà vu que φ est solution de (H) sur $] -1, 1[$. On vérifie que c'est le cas aussi sur $]1, +\infty[$ en dérivant deux fois et en remplaçant dans l'équation.

R 18 On a $z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1 \right) y(x) = \frac{1-x}{x} y(x)$ donc $y(x) = \varphi(x) z(x)$ donc

On en déduit que $y' = \varphi' z + \varphi z'$ et $y'' = \varphi'' z + 2\varphi' z' + \varphi z''$.

R 19 y vérifie (E) sur I si et seulement si

$$x^2(1 - x)(\varphi'' z + 2\varphi' z' + \varphi z'')(x) - x(1 + x)(\varphi' z + \varphi z')(x) + \varphi z(x) = 2x^3 \text{ soit}$$

$$z(x)(x^2(1 - x)\varphi''(x) - x(1 + x)\varphi'(x) + \varphi z(x)) + x^2(1 - x)(2\varphi' z' + \varphi z'')(x) + -x(1 + x)(\varphi z')(x) = 2x^3.$$

soit $x^2(1 - x)(2\varphi' z' + \varphi z'')(x) + -x(1 + x)(\varphi z')(x) = 2x^3$ car φ est solution de (H).

$$\text{or } \varphi(x) = \frac{x}{1 - x} \text{ donc } \varphi'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} \text{ donc}$$

$$x^2(1 - x)(2\varphi' z' + \varphi z'')(x) + -x(1 + x)(\varphi z')(x) = x^2 \frac{2}{1 - x} z'(x) + x^3 z''(x) - \frac{x^2(1 + x)}{1 - x} z' = x^3 z''(x) + x^2 z'(x)$$

donc y vérifie (E) sur I si et seulement si $xz'' + z' = 2x$ (on peut simplifier car $0 \notin I$).

Remarque: (autre méthode)

On aurait pu mener le calcul en partant de z en fonction de y :

$$z'(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y'(x) - \frac{1}{x^2} y(x) \text{ et } z''(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y''(x) - \frac{2}{x^2} y'(x) + \frac{2}{x^3} y(x):$$

Pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} xz''(x) + z'(x) &= (1-x)y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + \frac{2}{x^2}y(x) + (1/x - 1)y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x) \\ &= \frac{1}{x^2} (x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)) \end{aligned}$$

donc y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation

$$xz'' + z' = 2x$$

R 20 z est solution de (E_1) sur I si et seulement si $z' = Z$ est solution sur (I) de l'équation (E_2) : $xZ' + Z = 2x$.

L'équation homogène associée à (E_2) est (H_2) : $xZ' + Z = 0$, équivalente à $Z' + \frac{1}{x}Z = 0$ (x ne s'annule pas sur I). $a : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur I ; une primitive de a est $x \mapsto \ln(x)$ donc les solutions de (H_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$.

$x \mapsto x$ est solution particulière de (E_2) donc les solutions de (E_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{\lambda}{x} + x$.

Finalement, z est solution de (E_1) sur I si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x$.

R 21 Ceci équivaut à l'existence de $\mu \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $z(x) = \lambda \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \mu$.

De plus, pour $x \in I$, $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \neq 0$ donc y est solution de (E) sur I si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

tel que, pour tout $x \in I$, $y(x) = \frac{x}{1-x} \left(\lambda \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \mu \right)$.

Les solutions de (E) sur I sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x} \ln(x) + \frac{\mu x}{1-x} + \frac{x^3}{2(1-x)}$$

lorsque (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

Partie III - Solution de (E) sur $]0, +\infty[$

R 22 Pour $h \in]-1, 1[$, $\ln(1+h) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{h^n}{n}$ donc si $h \neq 0$,

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{h^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{h^n}{n+1}.$$

La somme d'une série entière de rayon de convergence R est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ donc $h \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{h^n}{n+1}$ est un prolongement de classe C^∞ de g_1 sur $] -1, 1[$ dont la valeur en 0 est 1.

On note encore g_1 la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $g_1(h) = \begin{cases} \frac{\ln(1+h)}{h} & \text{si } h \neq 0 \\ 1 & \text{si } h = 0 \end{cases}$.

Pour $x \in]0, 2[$; $g(x) = g_1(x-1)$ et g_1 est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ donc g est de classe C^∞ sur $]0, 2[$.

Par théorème sur les opérations, g est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ donc g est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

R 23 Soit f une solution de (E) sur $]0; +\infty[$. Alors f est solution sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. D'après la question précédente il existe des constantes réelles $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ telles que

$$\forall x \in]0; 1[, f(x) = \frac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} + \frac{2\mu_1 x + x^3}{2(1-x)} \text{ et } \forall x \in]1; +\infty[, f(x) = \frac{\lambda_2 x \ln(x)}{1-x} + \frac{2\mu_2 x + x^3}{2(1-x)}$$

• f doit être continue en 1. On a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ (limite usuelle) donc on doit avoir $2\mu_1 + 1 = 2\mu_2 + 1 = 0$ car sinon $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\mu_i x + x^3}{2(1-x)} = \pm\infty$. On a donc $\mu_1 = \mu_2 = -\frac{1}{2}$. Dans ce cas,

$$\forall x \in]0; 1[, f(x) = \frac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} + \frac{x^3 - x}{2(1-x)} = \frac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} - \frac{x(1+x)}{2}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) = \frac{\lambda_2 x \ln(x)}{1-x} - \frac{x(1+x)}{2}$$

On obtient que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\lambda_1 - 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\lambda_2 - 1$ donc λ_1 doit être égal à λ_2 .

On obtient donc qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]0; +\infty[\setminus \{1\}, f(x) = \frac{\lambda x \ln(x)}{1-x} - \frac{x(1+x)}{2} \text{ et } f(1) = -\lambda + 1.$$

soit, si on note encore g le prolongement (de g) obtenu dans la question précédente,

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = -\lambda x g(x) - \frac{x(1+x)}{2}.$$

• D'après la question précédente, la fonction g est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$ donc f est de classe C^∞ donc de classe C^2 sur $]0; +\infty[$.

• montrons que l'équation (E) est vérifiée en $x = 1$: Si $x \neq 1$, $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = 2x^2$. En passant à la limite lorsque x tend vers 1 (car f, f' et f'' sont continues), on obtient que $-2f'(1) + f(1) = 2$ donc (E) est vérifiée en $x = 1$.

Problème 2

Problème:

Partie I - Résolution dans le cas où $\mu = 0$

R 24 Si $0 \leq x \leq 1$ alors $2x - 1 \in [-1, 1]$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ est définie et continue sur $[-1; 1]$ donc f est continue sur $[0, 1]$.

Si $0 < x < 1$ alors $2x - 1 \in]-1, 1[$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ est dérivable sur $] -1, 1[$ donc f est dérivable sur $] -1, 1[$.

$$\text{De plus } f'(x) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x - 4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

R 25 Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} = \frac{x-1/2}{x(x-1)} = \frac{16x-8}{16x(x-1)} = \frac{16x-8}{16(x^2-x)}$$

R 26 • Equation équivalente portant sur y' :

Sur l'intervalle $]0, 1[$ $(E_0) \Leftrightarrow y'' + \frac{16x-8}{16(x^2-x)}y' = 0 \Leftrightarrow z' + \frac{16x-8}{16(x^2-x)}z = 0$ avec $z = y'$

On a donc

$$y \text{ vérifie } (E_0) \text{ ssi } y' \text{ vérifie } (E^*) : z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} \right) z = 0 \quad \text{et} \quad z = y'$$

• Résolution de (E^*) :

Posons $a(x) = \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}$, une primitive sur $]0, 1[$ est $A(x) = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln |x-1| = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln(1-x)$.

Les solutions de (E^*) sur $]0, 1[$ sont: $\varphi_A : x \mapsto C e^{-A(x)} = A x^{-1/2} (1-x)^{-1/2} = \frac{A}{\sqrt{x(1-x)}}$ pour $A \in \mathbb{R}$.

• Retour à (E_0) :

les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$ sont les fonction y telles que $z = y'$ est solutions de (E^*) sur $]0, 1[$ c'est-à-dire telles qu'il existe $A \in \mathbb{R}$, $y'(x) = \frac{A}{\sqrt{x(1-x)}} = A f'(x)$.

On en déduit que les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$ sont les fonctions :

$$f_{A,B} : x \mapsto A f(x) + B = A \arcsin(2x-1) + B \text{ où } A, B \in \mathbb{R}.$$

Partie II - Recherche d'une solution particulière dans le cas $\mu = 0$

R 27 Soit une fonction $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, somme d'une série entière de rayon $R > 0$.

Le th de dérivation terme à terme des séries entières donne: $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

donc $16(x^2-x)y'' + (16x-8)y' - \mu y = 0$

$$\Leftrightarrow 16 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 16 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 16 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \mu \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 \sum_{n=2(\text{ou } 0)}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 16 \sum_{n=1(\text{ou } 0)}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 16 \sum_{n=1(\text{ou } 0)}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \mu \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (16n(n-1) a_n - 16(n+1) n a_{n+1} + 16n a_n - 8(n+1) a_{n+1} - \mu a_n) x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} [(16n^2 - \mu) a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1}] x^n = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 x^n.$$

R 28 Par unicité du DSE,

La fonction y est donc solution de (E_μ) , ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $(16n^2 - \mu) a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1} = 0$. soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(16n^2 - \mu)}{8(n+1)(2n+1)} a_n = \frac{(16n^2 - \mu)}{4(2n+2)(2n+1)} a_n : (R_n)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(16(n-1)^2 - \mu)}{4(2n)(2n-1)} a_{n-1} = \frac{(16(n-1)^2 - \mu)}{4(2n)(2n-1)} \frac{(16(n-2)^2 - \mu)}{4(2n-2)(2n-3)} a_{n-2} \\ a_n &= \frac{(16(n-1)^2 - \mu)}{4(2n)(2n-1)} \times \frac{(16(n-2)^2 - \mu)}{4(2n-2)(2n-3)} \times \dots \times \frac{(16(0-2)^2 - \mu)}{4 \times 2 \times 1} \times a_0 \end{aligned}$$

(La relation (R_n) est appliquée pour la dernière fois pour exprimer a_0 en fonction de a_1 soit pour $n = 0$, ce qui explique la valeur des dernier facteurs du produit.

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)}{4^n (2n)!} \quad (*)$$

On peut vérifier cette relation par récurrence.

R 29 Si $a_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. La fonction y est la fonction nulle, somme de la série entière nulle de rayon de convergence $+\infty$.

R 30 Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ pour un entier p , on a $a_n = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)}{4^n (2n)!}$ pour tout $n \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Au rang $n = p+1$, la formule (*) donne $a_p = 0$ d'abord, et ensuite: $\forall n \geq p+1, a_n = 0$. Dans ce cas, toute solution développable en série entière est un polynôme de degré p . (On note dans ce cas $I = \mathbb{R}$).

R 31 Si $a_0 \neq 0$ et μ n'est pas de la forme $\mu = 16p^2$, alors $a_n = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)}{4^n (2n)!}$ pour tout n . Posons $u_n = a_n x^n$.
On a $a_{n+1} = \frac{(16n^2 - \mu)}{4(2n+2)(2n+1)} a_n$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(16n^2 - \mu)}{8(n+1)(2n+1)} x$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x|$, et donc en utilisant le théorème de D'Alembert :

- Si $|x| < 1$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument,
- Si $|x| > 1$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ diverge grossièrement.

On en déduit : $R = 1$ (On note dans ce cas $I =]-1, 1[$).

R 32 Comme on a raisonné par équivalence dans la question 27, les fonctions obtenues sont bien solution de (E_μ) (sur l'intervalle I obtenus précédemment)

R 33 Soit $y_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction obtenue pour $a_0 = 1$. L'ensemble des fonctions développables en série entière solutions de (E_μ) est égal à $\text{vect}(y_0)$.

L'ensemble des solutions de (E_μ) (homogène normalisée d'ordre 2) sur I est un espace vectoriel de dimension 2 donc il existe des solutions non développables en série entière.

Partie III - Etude aux bornes de $] -R, R[$ d'une solution particulière

R 34 Première méthode: récurrence (adaptée car on donne le résultat)

on a $a_0 = 1, \mu = 1$, et donc:

Première méthode: récurrence (adaptée car on donne le résultat)

On a $a_1 = -1$ et $\frac{-(4n)!}{4^{2n}((2n)!)^2(4n-1)}$ vaut -1 pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $a_n = \frac{-(4n)!}{4^{2n}((2n)!)^2(4n-1)}$.

On a $a_{n+1} = \frac{(4n-1)(4n+1)}{4(2n+2)(2n+1)} a_n = \frac{(4n+1)}{(4n+4)(4n+2)} \frac{-(4n)!}{4^{2n}((2n)!)^2}$

donc $a_{n+1} = \frac{(4n+1)(4n+4)(4n+2)(4n+3)}{((4n+4)(4n+2))^2} \frac{-(4n)!}{(4n+3)4^{2n}((2n)!)^2}$

donc $a_{n+1} = \frac{-(4(n+1))!}{4 \times 4((2n+2)(2n+1))^2 4^{2n}((2n)!)^2(4n+3)} = \frac{-(4(n+1))!}{4^{2n+2}((2(n+1))!)^2(4(n+1)-1)}$.

Ce qui achève la récurrence.

Deuxième méthode:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - 1)}{4^n (2n)!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1)}{4^n (2n)!} \quad (**)$$

Notons P_n le produit des entiers pairs, I_n le produit des entiers impairs, compris entre 1 et $4n$, de façon que

$(4n)! = P_n I_n$. Pour le produit des pairs, on a $P_n = 2 \times \dots \times (4n) = 2^{2n} \times 1 \times \dots \times (2n) = 2^{2n}(2n)!$

Considérons ensuite le produit :

$$Q_n = (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1) = -1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-5) \cdot (4n-3) \times (4n-1) = -I_n$$

On a donc :

$$(4n)! = P_n I_n = 2^{2n}(2n)! \cdot (-Q_n) = -2^{2n}(2n)!(4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1)$$

On en déduit que

$$a_n = \frac{-(4n)!}{2^{2n}(2n)!(4n-1)} \frac{1}{4^n(2n)!} = \frac{-(4n)!}{4^{2n}((2n)!)^2(4n-1)}$$

R 35 la formule de Stirling donne: $(4n)! \sim_{n \rightarrow \infty} e^{-4n}(4n)^{4n}\sqrt{2\pi 4n} = e^{-4n}4^{4n}n^{4n}2\sqrt{2\pi n}$ et $(2n)! \sim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}$, $(2n)!^2 \sim_{n \rightarrow \infty} e^{-4n}(2n)^{4n}2\pi 2n = e^{-4n}4^{2n}n^{4n}2\pi 2n$ (on a bien $2^{4n} = 4^{2n}$) donc :

$$a_n = \frac{-(4n)!}{4^{2n}(2n)!^2(4n-1)} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{-e^{-4n}4^{4n}n^{4n}2\sqrt{2\pi n}}{4^{2n}e^{-4n}4^{2n}n^{4n}2\pi 2n4n} = \frac{-\sqrt{n}}{4\sqrt{2\pi}n^2} = \frac{-1}{4\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$$

R 36 On a $R = 1$. Etudions la convergence des séries numériques $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-1)^n$:

On a $|a_n| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$ et la série de Riemann $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Nos deux séries numériques convergent donc absolument.

Exercice 3:

R 37 Récurrence forte!

Comme $u_0 = 3$, on a $u_1 = u_0^2 = 9$ et $u_2 = 2u_0u_1 = 54$.

Ainsi, on a bien $0 \leq \frac{u_0}{0!} = 3 \leq 4 = 4^{0+1}$, $0 \leq \frac{u_1}{1!} = 9 \leq 16 = 4^{1+1}$ et $0 \leq \frac{u_2}{2!} = 27 \leq 64 = 4^{3+1}$.

Soit $n \geq 3$ tel que $\forall k \in [[0; n]], 0 \leq \frac{u_k}{k!} \leq 4^{k+1}$, alors $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k} \geq 0$ car $u_0, \dots, u_n$ sont positifs.

De plus, par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \frac{u_k u_{n-k}}{k!(n-k)!} \leq n! 4^{k+1} 4^{n+1-k} = (n+1)! 4^{n+2}$ donc $\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} \leq 4^{n+2}$.

Par principe de récurrence forte, on a établi que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$.

R 38 Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$ et d'après a., le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} 4^{n+1} x^n$ vaut $\frac{1}{4}$ car $((4 \times x)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq \frac{1}{4}$. D'après le cours le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geq \frac{1}{4}$. Ainsi, la fonction f , qui est la somme de cette série entière, est bien définie sur $I =]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[\subset]-R; R[$.

R 39 On dérive terme à terme donc $\forall x \in I, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{u_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n$ à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence et après changement d'indice. On a donc $\forall x \in I, f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!} \cdot \frac{u_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n$ car $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On reconnaît un produit de CAUCHY, valide puisque $I \subset]-R; R[$, et on a $f'(x) = f(x)^2$. Par conséquent, f est bien solution sur I de l'équation (E) : $y' = y^2$.

R 40 Comme $f(0) = 3 \neq 0$ et que f est continue sur I , il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in]-r, r[, f(x) \neq 0$.

On a donc $\forall x \in]-r, r[, \frac{f'(x)}{f(x)^2} = 1$ donc $\forall x \in]-r, r[, \frac{f'(x)}{f(x)^2} - 1 = 0$.

Or $x \mapsto \frac{1}{f(x)} + x$ est une primitive de $x \mapsto \frac{f'(x)}{f(x)^2} - 1$ sur $]-r, r[$ donc est constante sur l'intervalle I .

Or $f(0) = 3$ donc $C = \frac{1}{3}$ donc $\forall x \in I, \frac{1}{f(x)} + x = \frac{1}{3}$ et $f(x) = \frac{3}{1-3x}$.

R 41 Or si $|x| < r$, alors $\frac{3}{1-3x} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n+1} x^n$ donc, par unicité du développement en série entière de f sur $]-r, r[$, on obtient $\frac{u_n}{n!} = 3^{n+1}$ donc $u_n = n! 3^{n+1}$.

Exercice 4

R 42 Posons $A = M - I_n = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & & x_2 y_n \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & & x_n y_n \end{pmatrix}$. La matrice A est de rang 0 ou 1 car les colonnes sont

toutes colinéaires à $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Si f est conoiquement associée à A , en complétant une base de $\ker(f)$ ($\dim(\ker(f)) \geq n-1$) en une base b , la

matrice de f dans b est de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & z_1 \\ \vdots & & \vdots & z_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & z_n \end{pmatrix}$. Or $\text{tr}(A') = \text{tr}(A)$ donc $z_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et Il existe

une matrice carrée P inversible telle que $P^{-1}AP = A'$.

On a $P^{-1}MP = I_n + P^{-1}AP$ donc $\det(M) = \det(P^{-1}MP) = 1 + z_n = 1 + \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

COMMENTAIRES

Remarques générales:

- Ne pas oublier avant le calcul sur une série entière de préciser pour quelle valeur de x le calcul est valable.
- Lorsque le résultat de la question est donnée et qu'il s'agit d'un calcul, le correcteur doit pouvoir suivre le calcul sans effort. Si vous faites 50 choses en même temps il ne pourra pas le faire. N'intervertir l'ordre des termes que si c'est nécessaire.
- Pas de point pour la règle de d'Alembert lorsqu'elle est inutile.

Remarques par question:

- Q1 la forme d'une matrice antisymétrique est supposée connue
La liberté de la famille obtenue doit être justifiée.
La phrase les matrices sont des combinaisons linéaires des matrices élémentaires donc la famille est libre est absurde puisqu'elle est vérifiée pour toutes les familles de matrices
- Q2 lorsqu'on voit que la série entière à étudier se ramène à une série connue dont on connaît le rayon convergence, il est inutile de calculer le rayon de convergence de cette série entière. On peut commencer par écrire 'si $|x| < R$ ' et calculer sans connaître R .
- Q3 attention la règle de D'Alembert n'est pas une équivalence. Il faut mentionner les deux cas pour pouvoir conclure.
- Q7 et 11 lorsqu'on intègre terme à terme un développement en série entière c'est entre 0 et x . Voilà pourquoi il ne faut pas oublier la valeur en 0 de la primitive choisi.
- Q8 si on reconnaît qu'on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme, il est inutile de chercher le rayon de convergence de la nouvelle série entière qui a le même rayon que la série qu'on intègre.
- Q11 erreur fréquente dans la primitive de $\left(\frac{x}{j}\right)^n$
- Q12 éviter de parler de la série entière f' ce qui n'a pas de sens puisque f' est une fonction et non pas une série entière
- Q13 ne pas traîner longtemps des puissances différentes de x . Les changements d'indice pour se ramener à des x^n partout doivent être fait rapidement
- Q14 invoquer le théorème d'unicité des coefficients d'une série entière sous forme d'équivalence et ne pas oublier quel que soit n dans la conclusion
- Q15 la série entière est géométrique inutile de calculer le rayon avec la règle de d'Alembert.
Lorsqu'il manque les premiers termes à une série géométrique il est toujours plus facile de factoriser par x à une certaine puissance que de retrancher les termes manquants
- Q19 la simplification des termes en z dû au fait que h est solution de l'équation h doit apparaître clairement. Cela d'autant plus que le résultat final est donné.
- Q 18 à 21 pour pouvoir conclure sur les solutions de l'équation différentielle il faut avoir raisonné par équivalence

- Q22 deuxième partie de la question écrire posons $x = 1 + h$ ne permet pas d'apporter une réponse satisfaisante. Il faut voir comment la nouvelle fonction g s'obtient à partir de g_1 comme composé pour appliquer le théorème de composition de fonctions dérivables
- Q23 prendre des constantes différentes sur l'intervalle 01 et sur l'intervalle 1 plus l'infini
Utiliser le caractère C2 de la fonction g permet d'éviter de refaire des calculs qui découlent de la question 22
- Q24 • mentionner le domaine de continuité et de dérivabilité de la fonction arcsinus qui est à la base de tout
 - Dire la composée de deux fonctions dérivables sur $]0, 1[$ est dérivable sur $]0, 1[$ est faux.
 - À quelle condition le théorème de composition de fonctions dérivables s'applique-t-il ?
- Q25 comme le résultat est donné on peut partir du manque de droite et se contenter de réduire le même dénominateur
Si vous faites le calcul de gauche à droite on ne comprend pas comment vous arrivez directement au résultat.
- Q26 confusion entre y' et y dans certaines copies
- Q32 mentionner que le raisonnement fait en q27 est une équivalence
- Q33 • les polynômes sont des séries entières particulières
 - Il s'agissait d'un raisonnement sur la dimension de l'ensemble des solutions
 - La fonction nulle ne peut pas faire partie d'une famille libre!
- Q34 le résultat étant donné, il faut que le correcteur puisse suivre votre raisonnement qui mène au résultat.
.
- Q 36
 - équivalent n'entraîne pas petit o mais entraîne grand O .
 - On peut raisonner par équivalent dans le premier cas puisque la série est à terme positifs
 - attention à ne pas utiliser le critère avec équivalent pour conclure à la convergence d'une série dont les termes ne sont pas de signe constant. (Commencer par l'absolue convergence avant de se lancer dans les séries alternées)
- Q37 un terme de la suite dépend de tous les précédents. Il faut donc faire une récurrence forte