

DM5 pour vendredi 16 octobre 2026

Exercice 1:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Q 1 Déterminer les valeurs propres de A et montrer que A est semblable à D .

Q 2 Calculer $(D - I_3)(D + I_3)(D - 2I_3)$

Q 3 En déduire que $(A - I_3)(A + I_3)(A - 2I_3) = 0$.

Q 4 Déterminer les sous-espaces propres de A et donner une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$.

Exercice 2:

Soit A une matrice carrée de taille n . On suppose que A est de rang 1.

Q 5 Montrer que A est semblable à une matrice A' dont les $n - 1$ premières colonnes sont nulles.
(indication: on utilisera le théorème de la base incomplète).

Q 6 En déduire que $\text{tr}(A + I_n) = n + \text{tr}(A)$ et $\det(A + I_n) = 1 + \text{tr}(A)$.
(indication: on utilisera la matrice A').

Exercice 3: endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{cases}$

Q 7 Montrer que φ est un endomorphisme.

Soit b une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est la taille de la matrice de φ dans la base b ?

Q 8 On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

On considère la base $b = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ($E_{i,j}$, matrice élémentaire définie en cours).

a Pour $(i, j) \in [[1, 2]]^2$, calculer $\varphi(E_{i,j})$ et exprimer $\varphi(E_{i,j})$ comme combinaison linéaire d'éléments de b .

b Ecrire la matrice de φ dans la base b . Exprimer la trace et le déterminant de φ à l'aide de la trace et du déterminant de A .

Exercice 4:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Q 9 Montrer que : $\det(M) = \det(A + B)\det(A - B)$.

Q 10 Donner une condition suffisante sur A et B pour qu'on aie: $\det(M) = \det(A^2 - B^2)$.

Q 11 On suppose D inversible.

a Trouver des matrices $U, V, X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t. que : $\left(\frac{A}{C} \middle| \frac{B}{D}\right) = \left(\frac{I_n}{0_n} \middle| \frac{U}{V}\right) \left(\frac{X}{Y} \middle| \frac{0_n}{I_n}\right)$.

b Montrer que si C et D commutent, alors : $\left\|\frac{A}{C} \middle| \frac{B}{D}\right\| = \det(AD - BC)$.

c Utiliser la question 1 pour trouver un contre-exemple qui montre que, pour $n = 2$, la formule ci-dessus peut être fausse si C et D ne commutent pas.

Exercice 5:

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = u_n v_n$, $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ et :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 3, \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & u_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -v_n \\ 0 & \cdots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

Q 12 Calculer Δ_1 et Δ_2 et montrer que : $\forall n \geq 3, \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}$.

Q 13 Montrer que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone; préciser dans quel sens.

Q 14 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \leq P_n$.

Q 15 Montrer que si la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, alors la série $\sum a_n$ converge.

Indication : on pourra étudier la série de terme général $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$.

Q 16 Montrer la réciproque.

Indication : on pourra étudier la série $\sum \ln(1 + a_n)$.

EXERCICE 6:

On se propose de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fois dérivables et vérifiant:

$$(\mathcal{E}) : \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f(-x) = \cos(x) + x$$

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

Q 17 Justifier qu'il existe un et un unique couple (g, h) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f = g + h,$$

g est paire et h est impaire,

g et h sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Q 18 On suppose f décomposé sous forme $g + h$ comme dans la question précédente.

Montrer que f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si g est solution d'une équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ et h est solution d'une équation différentielle $(\mathcal{E}_2)$ (on précisera les équations $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$).

Q 19 En déduire les solutions de $(\mathcal{E})$.

CORRIGE DM 5

Exercice 1:

R 1 On obtient $\chi_A = (X - 1)(X + 1)(X - 2)$ donc $\text{sp}(A) = \{-1, 1, 2\}$.

A est de taille 3 et admet 3 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Soit U_1, U_2, U_3 des vecteurs propres associés respectivement à $1, -1, 2$.

La famille $b = (U_1, U_2, U_3)$ est une libre d'après le cours donc base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Si f est canoniquement associée à A et b_0 la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors $\text{mat}_b(f) = D = P^{-1}AP$ avec $P = P_{b_0 \rightarrow b}$

R 2 Par propriété du produit de matrices diagonales,

$$(D - I_3)(D + I_3)(D - 2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3,3}$$

R 3 $(D - I_3)(D + I_3)(D - 2I_3) = \text{mat}_b((f - \text{id}) \circ (f + \text{id}) \circ (f - 2\text{id}))$ donc $(f - \text{id}) \circ (f + \text{id}) \circ (f - 2\text{id}) = 0$.

Or $(A - I_3)(A + I_3)(A - 2I_3) = \text{mat}_{b_0}((f - \text{id}) \circ (f + \text{id}) \circ (f - 2\text{id}))$ donc $(A - I_3)(A + I_3)(A - 2I_3) = 0$.

R 4 La résolution de $AX = X$ avec $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donne $E_1(A) = \text{vect}(U_1)$ avec $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même $E_{-1}(A) = \text{vect}(U_2)$ avec $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_2(A) = \text{vect}(U_3)$ avec $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $D = P^{-1}AP$ avec $P = P_{b_0 \rightarrow b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2:

On suppose que A est de rang 1

R 5 Soit f est canoniquement associée à A et b_0 la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Le théorème du rang entraîne que $\dim(\ker(f)) = n - 1$. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\ker(f)$, complétée en b base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La matrice de f dans b est de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ et il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = A'$.

R 6 On a $\text{tr}(A + I_n) = \text{tr}(A) + \text{tr}(I_n) = n + \text{tr}(A)$.

De plus, $P^{-1}(A + I_n)P = A' + I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & & \ddots & \vdots & \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 + a_n \end{pmatrix}$ qui est semblable à $A + I_n$.

On a donc $\det(A + I_n) = \det(A' + I_n) = 1 + a_n = 1 + \text{tr}(A') = 1 + \text{tr}(A)$.

Exercice 3:

R 7 La linéarité découle immédiatement des propriétés du produit matriciel.

R 8 a $\varphi(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = aE_{1,1} + bE_{2,1}$

$$\varphi(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = cE_{1,1} + dE_{2,1}$$

$$\varphi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = aE_{2,1} + bE_{2,2}$$

$$\varphi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = cE_{1,2} + dE_{2,2}.$$

On en déduit que $\text{mat}_b(\varphi) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$ notée M .

a On en déduit que $\text{tr}(\varphi) = \text{tr}(M) = 2\text{tr}(A)$ et $\det(\varphi) = \det(M) = \det(A)^2$ (par la formule du déterminant triangulaire par bloc).

Exercice 4:

R 9 • Par opération sur les lignes et les colonnes, on a :

$$\left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} A & B-A \\ \hline B & A-B \end{array} \right| \quad C_{i+n} \leftarrow C_{i+n} - C_i \quad (i \in [[1, n]]) = \left| \begin{array}{c|c} A+B & 0 \\ \hline B & A-B \end{array} \right| \quad L_i \leftarrow L_i + L_{i+n} \quad (i \in [[1, n]]) = \det \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix}$$

• Autre méthode: multiplication matricielle: $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix}$, puis l'on prend le déterminant...

R 10 Comme $\det(A+B)\det(A-B) = \det((A+B)(A-B)) = \det(A^2 - AB + BA - B^2)$, d'après la question précédente, il suffit que $AB = BA$.

(identité de Bernoulli pour $n = 2$ si les matrices commutent).

R 11 a Par produit par blocs, on a : $\begin{pmatrix} I_n & U \\ 0_n & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0_n \\ Y & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+UY & U \\ VY & V \end{pmatrix}$. Donc il suffit de trouver

$$U, V, X, Y \text{ telles que : } \begin{cases} X+UY & = A \\ U & = B \\ VY & = C \\ V & = D \end{cases} \text{ soit } V = D \text{ et } U = B; \text{ d'où } \tilde{A}^1 \text{ comme } D \text{ inversible : } Y = D^{-1}C, \text{ et}$$

$$X = A - BD^{-1}C.$$

b D'après les formules de déterminant d'un produit, et de déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) par blocs, on a :

$$\left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} I_n & U \\ \hline 0_n & V \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{c|c} X & 0_n \\ \hline Y & I_n \end{array} \right| \quad (\det. \text{ d'un produit}) = \det(V) \times \det(X) = \det(D) \times \det(A - BD^{-1}C) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

c Dans 1a, il suffit de prendre $A = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $AD - BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\det(AD - BC) = 0$.

Et par ailleurs, d'après la formule de la question 1a, on a alors :

$$\left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right| = \det(A + B) \det(A - B) = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 1.$$

Exercice 5:

R 12 Calcul de Δ_1 et Δ_2 :

On a $\Delta_1 = 1 + u_1 v_1 = 1 + a_1$ et d'après la règle de Sarrus,

$$\Delta_2 = 1 + u_1 v_1 + u_2 v_2 = 1 + a_1 + a_2.$$

Relation : $\forall n \geq 3, \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}$:

Notons A la matrice d'ordre $n + 1$ telle que, selon l'énoncé, $\Delta_n = \det(A)$.

Pour tout i, j , notons $A(i, j)$ la matrice A privée de la ligne i et de la colonne j .

Le développement du déterminant Δ_n par rapport à la dernière colonne donne :

$$\Delta_n = (-1)^{(n+1)+n} (-v_n) \det(A(n, n+1)) + (-1)^{(n+1)+(n+1)} \times 1 \times \det(A(n+1, n+1)) = \det(A(n+1, n+1)) + v_n \det(A(n, n+1))$$

Il est clair que $\det(A(n+1, n+1)) = \Delta_{n-1}$ et par ailleurs :

$$\det(A(n, n+1)) = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & u_{n-2} & 1 & -v_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_n \end{vmatrix} \stackrel{\text{dev}^t / L_n}{=} u_n \Delta_{n-2}.$$

D'où : $\Delta_n = \Delta_{n-1} + u_n v_n \Delta_{n-2} = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}$.

R 13 La suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante :

Montrons par récurrence double sur $n \geq 1$ que $\Delta_n \geq 0$.

• C'est clair si $n = 1$ ou $n = 2$ compte tenu des valeurs obtenues précédemment.

• Si $n \geq 3$, supposons le résultat vrai aux rangs $n - 1$ et $n - 2$.

Alors $\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2} \geq 0$, ce qui prouve le résultat au rang n .

On en déduit : $\forall n \geq 3, \Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n \Delta_{n-2} \geq 0$.

Par ailleurs, $\Delta_2 - \Delta_1 = a_2 \geq 0$, donc la suite (Δ_n) est bien croissante.

Autre idée : montrer par récurrence simple sur $n \geq 1$ la relation $\Delta_{n+1} \geq \Delta_n \geq 0$.

L'hérédité se montre par : $\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + \underbrace{a_{n+2} \Delta_n}_{\geq 0} \geq \Delta_{n+1}$.

R 14 Relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$:

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ la relation : $\Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$

• Si $n = 1, \Delta_1 = 1 + a_1$.

• Si $n = 2, \Delta_2 = 1 + a_1 + a_2 \leq 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 = (1 + a_1)(1 + a_2)$.

• Si $n \geq 3$, supposons le résultat vrai aux rangs $n - 1$ et $n - 2$. Alors, on a :

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2} \leq \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) + a_n \prod_{k=1}^{n-2} (1 + a_k) = (1 + a_{n-1} + a_n) \prod_{k=1}^{n-2} (1 + a_k) \leq (1 + a_{n-1})(1 + a_n) \prod_{k=1}^{n-2} (1 + a_k)$$

Autre méthode (astucieuse) :

On a : $\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2} \leq \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-1}$, car la suite (Δ_n) est croissante et $a_n \geq 0$.

On obtient donc $\Delta_n \leq (1 + a_n) \Delta_{n-1}$ et on peut prouver le résultat par récurrence simple (relation vraie à partir de $n = 3$, donc récurrence à partir de $n = 2$; prouver $n = 1$ à part).

R 15 Comme la suite (Δ_n) est croissante et que $\Delta_1 = 1 + a_1 \geq 1$, on a pour tout $n \geq 3$, donc :

$$0 \leq a_n \leq a_n \Delta_{n-2} = \Delta_n - \Delta_{n-1}.$$

Si la suite (Δ_n) converge, alors par télescopage, la série $\sum \Delta_n - \Delta_{n-1}$ converge, donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positif, la série $\sum a_n$ converge.

Variante : comme la suite (Δ_n) converge (soit ℓ sa limite) et est croissante, on $\ell \geq \Delta_n \geq \Delta_1 > 0$. Donc $\ell \neq 0$, donc $\Delta_{n-2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.

Ainsi la relation $\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}$ s'écrit $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} (\Delta_n - \Delta_{n-1})$, et on peut conclure par comparaison avec une série télescopique convergente.

R 16 Si la série $\sum a_n$ converge, alors $\lim(a_n) = 0$ d'où $\ln(1 + a_n) \sim a_n \geq 0$, car $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Par théorème de comparaison pour les séries à termes positif, la série $\sum \ln(1 + a_n)$ est de même nature que $\sum a_n$ donc converge, c'est-à-dire que la suite $S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + a_k)$ de ses sommes partielles converge.

Or $P_n = e^{S_n}$, et l'exponentielle est continue, donc la suite (P_n) converge aussi.

Or la suite (P_n) est clairement croissante, donc :

$$\Delta_n \leq P_n \leq \lim(P_n).$$

Ainsi la suite (Δ_n) est majorée; comme par ailleurs on a vu qu'elle est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, la suite (Δ_n) converge.

EXERCICE 6:

R 17 On raisonne par analyse-synthèse:

Supposons $f = g + h$ et f est paire et g est impaire. alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases},$$

ce qui entraîne l'unicité du couple (f, g) .

Réciproquement, si $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, on vérifie que $f = g + h$, g est paire et h est impaire.

De plus, comme f est deux fois dérivable, $x \mapsto f(-x)$ l'est aussi et donc g et h le sont aussi.

R 18 On a

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow g''(x) + h''(x) - g(-x) - h(-x) = \cos(x) + x \\ &\Leftrightarrow g''(x) - g(x) - \cos(x) = -h''(x) - h(x) + x \end{aligned}$$

Or donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$ donc en dérivant ($x \mapsto g(-x)$ est dérivable déjà vu) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -g'(-x)$. Autrement dit, la dérivée d'une fonction paire est impaire et, de même la dérivée d'une fonction impaire est paire. On en déduit que g'' est paire et h'' est impaire donc $x \mapsto g''(x) - g(x) + \cos(x)$ est paire et $x \mapsto -h''(x) - h(x) + x$ est impaire.

Une fonction u qui est paire et impaire est nulle ($u(-x) = u(x) = -u(x)$) donc

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \begin{cases} g''(x) - g(x) - \cos(x) = 0 : (\mathcal{E}_1) \\ -h''(x) - h(x) + x : (\mathcal{E}_2) \end{cases}$$

R 19 Les solutions de $(\mathcal{H}_1)$ sont les fonctions $x \mapsto A \sinh(x) + B \cosh(x)$ donc On peut chercher une solution particulière de $(\mathcal{E}_1) : g''(x) - g(x) = \cos(x)$ sous forme $x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$ et on trouve que $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(x)$ est solution donc g vérifie $(\mathcal{E}_1)$ si et seulement si $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R} g(x) = A \sinh(x) + B \cosh(x) - \frac{1}{2} \cos(x)$. Les solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sont les fonctions $x \mapsto C \sin(x) + D \cos(x)$ donc on peut chercher une solution particulière de $(\mathcal{E}_2) : h''(x) + h(x) = x$ sous forme $x \mapsto ax + b$ et on trouve que $x \mapsto x$ est solution donc h vérifie $(\mathcal{E}_2)$ si et seulement si $\exists (C, D) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R} h(x) = C \sin(x) + D \cos(x) + x$. On en déduit que f vérifie $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\exists (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in \mathbb{R} h(x) = A \sinh(x) + B \cosh(x) - \frac{1}{2} \cos(x) + C \sin(x) + D \cos(x) + x$.