# DM5 pour vendredi 16 octobre 2026

## Exercice 1:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Q 1** *Déteminer les valeurs propres de $A$ et montrer que $A$ est semblabe à $D$.*

**Q 2** *Calculer $(D - I_3)(D + I_3)(D - 2I_3)$*

**Q 3** *En déduire que $(A - I_3)(A + I_3)(A - 2I_3) = 0$.*

**Q 4** *Déterminer les sous-espaces propres de $A$ et donner une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$.*

## Exercice 2:

Soit $A$ une matrice carrée de taile $n$. On suppose que $A$ est de rang 1.

**Q 5** *Montrer que $A$ est semblable à une matrice $A'$ dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.*
*(indication: on utilisera le théorème de la base incomplète).*

**Q 6** *En déduire que $tr(A + I_n) = n + tr(A)$ et $\det(A + I_n) = 1 + tr(A)$.*
*(indication: on utilisera la matrice $A'$).*

## Exercice 3: endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightharpoonup \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{cases}$

**Q 7** *Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme.*
*Soit $b$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est la taille de la matrice de $\varphi$ dans la base $b$?*

**Q 8** *On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.*
*On considère la base $b = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ($E_{i,j}$, matrice élémentaire définie en cours).*

**a** *Pour $(i,j) \in [[1,2]]^2$, calculer $\varphi(E_{i,j})$ et exprimer $\varphi(E_{i,j})$ comme combiaison linéaire d'éléments de $b$.*

**b** *Ecrire la matrice de $\varphi$ dans la base $b$. Exprimer la trace et le déterminant de $\varphi$ à l'aide de la trace et du déterminant de $A$.*

## Exercice 4:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

**Q 9** *Montrer que :* $\det(M) = \det(A + B)\det(A - B)$.

**Q 10** *Donner une condition suffisante sur $A$ et $B$ pour qu'on aie*: $\det(M) = \det(A^2 - B^2)$.

**Q 11** *On suppose $D$ inversible.*

**a** *Trouver des matrices $U, V, X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t. que :* $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & U \\ \hline 0_n & V \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X & 0_n \\ \hline Y & I_n \end{array}\right)$.

**b** *Montrer que si $C$ et $D$ commutent, alors :* $\det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\right) = \det(AD - BC)$.

**c** *Utiliser la question 1 pour trouver un contre-exemple qui montrer que, pour $n = 2$, la formule ci-dessus peut être fausse si $C$ et $D$ ne commutent pas.*

# Exercice 5:

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = u_n v_n, P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$ et :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 3, \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & u_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -v_n \\ 0 & \cdots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

**Q 12** *Calculer $\Delta_1$ et $\Delta_2$ et montrer que : $\forall n \geqslant 3, \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n\Delta_{n-2}$.*

**Q 13** *Montrer que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone; préciser dans quel sens.*

**Q 14** *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \leqslant P_n$.*

**Q 15** *Montrer que si la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors la série $\sum a_n$ converge.*
*Indication : on pourra étudier la série de terme général $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$.*

**Q 16** *Montrer la réciproque.*
*Indication : on pourra étudier la série $\sum \ln(1 + a_n)$.*

# EXERCICE 6:

On se propose de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fois dérivables et vérifiant:

$$(\mathcal{E}) : \forall x \in \mathbb{R}\ , f''(x) - f(-x) = \cos(x) + x$$

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

**Q 17** *Justifier qu'il existe un et un unique couple $(g, h)$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que*

$$f = g + h,$$
$$g \text{ est paire et } h \text{ est impaire,}$$
$$g \text{ et } h \text{ sont deux fois dérivables sur } \mathbb{R}.$$

**Q 18** *On suppose $f$ décomposé sous forme $g + h$ comme dans la question précédente.*
*Montrer que $f$ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $g$ est solution d'une équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ et $h$ est solution d'une équation différentielle $(\mathcal{E}_2)$ (on précisera les équations $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$).*

**Q 19** *En déduire les solutions de $(\mathcal{E})$.*

# CORRIGE DM 5

## Exercice 1:

**R 1** *On obtient* $\chi_A = (X-1)(X+1)(X-2)$ *donc* $sp(A) = \{-1, 1, 2\}$.
*A est de taille* 3 *et admet* 3 *valeurs propres distinctes donc est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension* 1.
*Soit* $U_1, U_2, U_3$ *des vecteurs propres associés respectivement à* $1, -1, 2$.
*La famille* $b = (U_1, U_2, U_3)$ *est une libre d'après le cours donc base de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
*Si* $f$ *est canoniquement associée à* $A$ *et* $b_0$ *la base canonique de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *, alors* $mat_b(f) = D = P^{-1}AP$ *avec* $P = P_{b_0 \rightharpoonup b}$

**R 2** *Par propriété du produit de matrices diagonales,*
$$(D-I_3)(D+I_3)(D-2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3,3}$$

**R 3** $(D-I_3)(D+I_3)(D-2I_3) = mat_b((f-id)\circ(f+id)\circ(f-2id))$ *donc* $(f-id)\circ(f+id)\circ(f-2id) = 0$.
*Or* $(A-I_3)(A+I_3)(A-2I_3) = mat_{b_0}((f-id)\circ(f+id)\circ(f-2id))$ *donc* $(A-I_3)(A+I_3)(A-2I_3) = 0$.

**R 4** *La résolution de* $AX = X$ *avec* $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *donne* $E_1(A) = vect(U_1)$ *avec* $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
*De même* $E_{-1}(A) = vect(U_2)$ *avec* $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $E_2(A) = vect(U_3)$ *avec* $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
*On a donc* $D = P^{-1}AP$ *avec* $P = P_{b_0 \rightharpoonup b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

## Exercice 2:

On suppose que $A$ est de rang 1

**R 5** *Soit* $f$ *est canoniquement associée à* $A$ *et* $b_0$ *la base canonique de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
*Le théorème du rang entraîne que* $\dim(\ker(f)) = n-1$. *Soit* $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ *une base de* $\ker(f)$, *complétée en b base de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
*La matrice de* $f$ *dans b est de la forme* $A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix}$ *et il existe* $P \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que* $P^{-1}AP = A'$.

**R 6** *On a* $tr(A+I_n) = tr(A) + tr(I_n) = n + tr(A)$.
*De plus,* $P^{-1}(A+I_n)P = A' + I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & & \ddots & \vdots & \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+a_n \end{pmatrix}$ *qui est semblable à* $A+I_n$.
*On a donc* $\det(A+I_n) = \det(A'+I_n) = 1 + a_n = 1 + tr(A') = 1 + tr(A)$.

# Exercice 3:

**R 7** *La linéarité découle immédiatement des propriétés du produit matriciel.*

**R 8** **a** $\varphi(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = aE_{1,1} + bE_{2,1}$

$\varphi(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = cE_{1,1} + dE_{2,1}$

$\varphi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = aE_{2,1} + bE_{2,2}$

$\varphi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = cE_{1,2} + dE_{2,2}.$

*On en déduit que* $mat_b(\varphi) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ *notée* $M$.

**a** *On en déduit que* $tr(\varphi) = tr(M) = 2tr(A)$ *et* $\det(\varphi) = \det(M) = \det(A)^2$ *(par la formule du déterminant triangulaire par bloc).*

# Exercice 4:

**R 9** • *Par opération sur les lignes et les colonnes, on a :*

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & B-A \\ \hline B & A-B \end{array}\right| \quad C_{i+n} \leftarrow C_{i+n} - C_i \quad (i \in [[1,n]]) = \left|\begin{array}{c|c} A+B & 0 \\ \hline B & A-B \end{array}\right| \quad L_i \leftarrow L_i + L_{i+n} \quad (i \in [[1,n]]) = \det$$

• *Autre méthode: multiplication matricielle:* $\left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) M \left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A+B & 0 \\ \hline B & A-B \end{array}\right)$*, puis l'on prend le déterminant...*

**R 10** *Comme* $\det(A+B)\det(A-B) = \det((A+B)(A-B)) = \det(A^2 - AB + BA - B^2)$*, d'après la question précédente, il suffit que* $AB = BA$.
*(identité de Bernoulli pour* $n = 2$ *si les matrices commutent).*

**R 11** **a** *Par produit par blocs, on a :* $\left(\begin{array}{c|c} I_n & U \\ \hline 0_n & V \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X & 0_n \\ \hline Y & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} X+UY & U \\ \hline VY & V \end{array}\right)$*. Donc il suffit de trouver* $U, V, X, Y$ *telles que :* $\begin{cases} X + UY &= A \\ U &= B \\ VY &= C \\ V &= D \end{cases}$ *soit* $V = D$ *et* $U = B$*; d'oÃ¹ comme* $D$ *inversible :* $Y = D^{-1}C$*, et* $X = A - BD^{-1}C$.

**b** *D'après les formules de déterminant d'un produit, et de déterminant d'une matrice trian- gulaire (supérieure ou inférieure) par blocs , on a :*

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} I_n & U \\ \hline 0_n & V \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{c|c} X & 0_n \\ \hline Y & I_n \end{array}\right| \quad \text{(det. d'un produit)} = \det(V)\times\det(X) = \det(D)\times\det\left(A - BD^{-1}C\right) = \det$$

**c** *Dans 1a, il suffit de prendre* $A = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $C = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Alors* $AD - BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *d'où* $\det(AD - BC) = 0$.

*Et par ailleurs, d'après la formule de la question 1a, on a alors :*

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right| = \det(A+B)\det(A-B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

# Exercice 5:

**R 12** *Calcul de* $\Delta_1$ *et* $\Delta_2$ *:*
*On a* $\Delta_1 = 1 + u_1v_1 = 1 + a_1$ *et d'après la règle de Sarrus,*

$$\Delta_2 = 1 + u_1v_1 + u_2v_2 = 1 + a_1 + a_2.$$

*Relation :* $\forall n \geqslant 3, \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n\Delta_{n-2}$ *:*
*Notons A la matrice d'ordre* $n+1$ *telle que, selon l'énoncé,* $\Delta_n = \det(A)$.
*Pour tout* $i, j$, *notons* $A(i,j)$ *la matrice A privée de la ligne* $i$ *et de la colonne* $j$.
*Le développement du déterminant* $\Delta_n$ *par rapport à la dernière colonne donne :*

$$\Delta_n = (-1)^{(n+1)+n}(-v_n)\det(A(n,n+1)) + (-1)^{(n+1)+(n+1)} \times 1 \times \det(A(n+1,n+1)) = \det(A(n+1,n+1)) + v_n \det(A(n,n+$$

*Il est clair que* $\det(A(n+1,n+1)) = \Delta_{n-1}$ *et par ailleurs :*

$$\det(A(n,n+1)) = \left|\begin{array}{ccccc} 1 & -v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & u_{n-2} & 1 & -v_{n-1} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_n \end{array}\right| \underset{dev^t/L_n}{=} u_n\Delta_{n-2}.$$

*D'où :* $\Delta_n = \Delta_{n-1} + u_nv_n\Delta_{n-2} = \Delta_{n-1} + a_n\Delta_{n-2}$.

**R 13** *La suite* $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est croissante :*
*Montrons par récurrence double sur* $n \geqslant 1$ *que* $\Delta_n \geqslant 0$.
• *C'est clair si* $n = 1$ *ou* $n = 2$ *compte tenu des valeurs obtenues précédemment.*
• *Si* $n \geqslant 3$, *supposons le résultat vrai aux rangs* $n-1$ *et* $n-2$.
*Alors* $\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n\Delta_{n-2} \geqslant 0$, *ce qui prouve le résultat au rang* $n$.
*On en déduit:* $\forall n \geqslant 3, \Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n\Delta_{n-2} \geqslant 0$.
*Par ailleurs,* $\Delta_2 - \Delta_1 = a_2 \geqslant 0$, *donc la suite* $(\Delta_n)$ *est bien croissante.*
*Autre idée : montrer par récurrence simple sur* $n \geqslant 1$ *la relation* $\Delta_{n+1} \geqslant \Delta_n \geqslant 0$.
*L'hérédite se montre par :* $\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + \underbrace{a_{n+2}\Delta_n}_{\geqslant 0} \geqslant \Delta_{n+1}$.

**R 14** *Relation:* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ *:*

*Montrons par récurrence double sur* $n \in \mathbb{N}^*$ *la relation :* $\Delta_n \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$
• *Si* $n = 1, \Delta_1 = 1 + a_1$.
• *Si* $n = 2, \Delta_2 = 1 + a_1 + a_2 \leqslant 1 + a_1 + a_2 + a_1a_2 = (1+a_1)(1+a_2)$.
• *Si* $n \geqslant 3$, *supposons le résultat vrai aux rangs* $n-1$ *et* $n-2$.*Alors, on a :*

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n\Delta_{n-2} \leqslant \prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k) + a_n\prod_{k=1}^{n-2}(1+a_k) = (1+a_{n-1}+a_n)\prod_{k=1}^{n-2}(1+a_k) \leqslant (1+a_{n-1})(1+a_n)\prod_{k=1}^{n-2}(1+a_k)$$

*Autre méthode (astucieuse) :*
*On a :* $\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n\Delta_{n-2} \leqslant \Delta_{n-1} + a_n\Delta_{n-1}$, *car la suite* $(\Delta_n)$ *est croissante et* $a_n \geqslant 0$.
*On obtient donc* $\Delta_n \leqslant (1+a_n)\,\Delta_{n-1}$ *et on peut prouver le résultat par récurrence simple (relation vraie à partir de* $n=3$, *donc récurrence à partir de* $n=2$*; prouver* $n=1$ *à part).*

**R 15** *Comme la suite* $(\Delta_n)$ *est croissante et que* $\Delta_1 = 1 + a_1 \geqslant 1$, *on a pour tout* $n \geqslant 3$, *donc :*

$$0 \leqslant a_n \leqslant a_n\Delta_{n-2} = \Delta_n - \Delta_{n-1}.$$

*Si la suite* $(\Delta_n)$ *converge, alors par télescopage, la série* $\sum \Delta_n - \Delta_{n-1}$ *converge,*
*donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positif, la série* $\sum a_n$ *converge.*
*Variante : comme la suite* $(\Delta_n)$ *converge (soit* $\ell$ *sa limite) et est croissante, on* $\ell \geqslant \Delta_n \geqslant \Delta_1 > 0$. *Donc* $\ell \neq 0$, *donc* $\Delta_{n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.
*Ainsi la relation* $\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n\Delta_{n-2}$ *s'écrit* $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}(\Delta_n - \Delta_{n-1})$, *et on peut conclure par comparaison avec une série télescopique convergente.*

**R 16** *Si la série* $\sum a_n$ *converge, alors* $\lim(a_n) = 0$ *d'où* $\ln(1+a_n) \sim a_n \geqslant 0$, *car* $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$.
*Par théorème de comparaison pour les séries à termes positif, la série* $\sum \ln(1+a_n)$ *est de même nature que* $\sum a_n$ *donc converge, c'est-à-dire que la suite* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+a_k)$ *de ses sommes partielles converge.*
*Or* $P_n = \mathrm{e}^{S_n}$, *et l'exponentielle est continue, donc la suite* $(P_n)$ *converge aussi.*
*Or la suite* $(P_n)$ *est clairement croissante, donc :*

$$\Delta_n \leqslant P_n \leqslant \lim(P_n).$$

*Ainsi la suite* $(\Delta_n)$ *est majorée; comme par ailleurs on a vu qu'elle est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, la suite* $(\Delta_n)$ *converge.*

# EXERCICE 6:

**R 17** *On raisonne par analyse-synthèse:*
*Supposons* $f = g + h$ *et* $f$ *est paire et* $g$ *est impaire. alors* $\forall x \in \mathbb{R}$,
$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$,
*ce qui entraîne l'unicité du couple* $(f,g)$.
*Réciproquement, si* $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ *et* $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, *on vérifie que* $f = g + h$, $g$ *est paire et* $h$ *est impaire.*
*De plus, comme* $f$ *est deux fois dérivable,* $x \mapsto f(-x)$ *l'est aussi et donc* $g$ *et* $h$ *le sont aussi.*

**R 18** *On a*

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow g''(x) + h''(x) - g(-x) - h(-x) = \cos(x) + x \\ &\Leftrightarrow (g''(x) - g(x)) + (h''(x) - h(x)) = \cos(x) + x \end{aligned}$$

*Or donc* $\forall x \in \mathbb{R}$ , $g(x) = g(-x)$ *donc en dérivant* ($x \mapsto g(-x)$ *est dérivable déjà vu)* $\forall x \in \mathbb{R}$ , $g'(x) = -g'(-x)$.
*Autrement dit, la dérivée d'une fonction paire est impaire et, de même la dérivée d'une fonction impaire est paire.*
*On en déduit que* $g''$ *est paire et* $h''$ *est impaire donc* $x \mapsto g''(x) - g(x)$ *est paire et* $x \mapsto -h''(x) - h(x)$ *est impaire et* $x \mapsto \cos(x)$ *est paire et* $x \mapsto x$ *est impaire.*
*Par unicité de la décomposition en fonction somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire*

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \begin{cases} g''(x) - g(x) - \cos(x) = 0 : (\mathcal{E}_1) \\ -h''(x) - h(x) + x : (\mathcal{E}_2) \end{cases}$$

**R 19** *Les solutions de* $(\mathcal{H}_1)$ *sont les fonctions* $x \mapsto A\sinh(x) + B\cosh(x)$ *donc On peut chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_1) : g''(x) - g(x) = \cos(x)$ *sous forme* $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ *et on trouve que* $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(x)$ *est solution donc* $g$ *vérifie* $(\mathcal{E}_1)$ *si et seulement si* $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}\ g(x) = A\sinh(x) + B\cosh(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$.
*On cherche les solutions paires de* $(\mathcal{E}_1)$ *qui sont donc les fonctions* $x \mapsto B\cosh(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$
*Les solutions de* $(\mathcal{H}_2)$ *sont les fonctions* $x \mapsto C\sin(x) + D\cos(x)$ *donc on peut chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_2) : h''(x) + h(x) = x$ *sous forme* $x \mapsto ax + b$ *et on trouve que* $x \mapsto x$ *est solution donc* $h$ *vérifie* $(\mathcal{E}_2)$ *si et seulement si* $\exists (C,D) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}\ h(x) = C\sin(x) + D\cos(x) + x$.
*On cherche les solutions impaires de* $(\mathcal{E}_2)$ *qui sont donc les fonctions* $x \mapsto C\sin(x) + x$
*On en déduit que* $f$ *vérifie* $(\mathcal{E})$ *si et seulement si*
$\exists (B,C) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in \mathbb{R}\ h(x) = B\cosh(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + C\sin(x) + x$.

COMMENTAIRES

Remarques générales:

- Pas de notation pour 'est semblable à' et sûrement pas la notation pour des matrices équivalentes $\sim$ par ligne ou par colonne
- Pas de Sigma dans les théorèmes de comparaison sur les séries
- Simplification matricielle par une matrice inversible seulement
- On montre par récurrence un résultat qui dépend de n pas qu'une suite est croissante.!

Exercice 1:

- Q1 il suffit de calculer le polynôme caractéristique et d'appliquer le théorème du cours sur les matrices ayant n valeur propre distincte. Le calcul de la matrice de passage n'était demandé qu'à la question 4.
- Q4 Liberté des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes n'a pas à être démontré

Exercice 2:

- Q5 il fallait compléter une base du noyau de f (et non de l'image)
- Q5 Ne pas confondre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Q5 On ne peut pas compléter en général une base du noyau avec un vecteur de l'image car cela supposerait que ces sous-espace sont supplémentaires ce qui n'est pas le cas en général.

Exercice 4:

- Q9 L1 remplacé par L1 - L2 incorrect (on maniqupel $n$ lignes dans un matrice de taille $2n$ et non 2)
- Q10 attention $M = N$ n'est **pas équivalent** à $\det(M) = \det N$.
- Q10 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ **faux en général** dans l'ensemble des matrices carrées qui n'est pas commutatif
- Q10 On avait simplement une condition **suffisante** si AB = BA alors...

Exercice 5

- Q12 la relation ne se montre pas par récurrence mais en développant par rapport à les lignes et des colonnes.
- Q12 Attention à bien vérifier que vous utilisez l'hypothèse de récurrence dans une démonstration par récurrence.
- Q13 le plus simple était de commencer par montrer que Delta n est positif par récurrence double
- Q13 la récurrence double doit être initialisée pour n = 1 et n = 2
- Q15 et 16 attention à bien passer par l'application des théorèmes sur les séries à terme positif ou sur les suites croissantes majorées. Confusion entre 0 et 1 dans de nombreuses copies
- Majorer les suites par des constantes: $\Delta_n \leq P_n$ n'est pas une majoration de la suite $(\Delta_n)$

- Q15 et 16 Théorème de passage à la limite: les deux suites encadrantes doivent avoir la même limite, **ce qui n'était pas le cas ici**

Exercice 6:

Bien que l'idée soit la même dans l'exercice 5 il ne s'agit pas du théorème de superposition pour les équations différentielles linéaires mais une adaptation à l'exercice qui ne traite pas d'une équation différentielle.

- Q18 on peut identifier la partie pair et la partie impaire de l'équation à condition de le justifier à l'aide de la question précédente
- Q19 ne pas oublier que g est paire et h est impaires.