# DM6 pour lundi 2 novembre 2026

(corrigé sur cahier de prépa à partir du 31 octobre)
(sujet de centralePC disponible sur cahier de prépa pour approfondir)

## Exercice 1:

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$, et $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
Soit $f$ et $g$ les endomorphismes canoniquement associés respectivement à $A$ et $B$. Soit $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

**Q 1** *Déterminer le rang de $f$. En déduire que $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel de dimension 1. Déterminer un vecteur $u_1 \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(u_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$ dont la première composante vaut 1.*

**Q 2** *Déterminer l'image par $f$ de $u_2 = e_1 + e_2$.*

**Q 3** *Déterminer $P_1 \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.*

**Q 4** *On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \det(xI_2 - B)$. Justifier que $P$ est un polynôme de degré 2 admettant deux racines réelles $\lambda_1$ et $\lambda_2$ que l'on précisera.*
*Justifier rapidement que $\ker(\lambda_i id_{\mathbb{R}^2} - g) \neq \{0\}$.*

**Q 5** *Pour $i \in \{1, 2\}$, déterminer un vecteur $v_i$ de première composante égale à 1 vérifiant $g(v_i) = \lambda_i v_i$.*

**Q 6** *En déduire une matrice $P_2 \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.*

**Q 7** *Montrer que $M$ est semblable à la matrice blocs $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$.*

**Q 8** *Soit la matrice définie par blocs par $P_4 = \left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & P_2 \end{array}\right)$.*
*Justifier que $P$ est inversible et préciser la matrice $P_4^{-1}$. Préciser la matrice $P_4^{-1}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)P_4$.*

**Q 9** *En déduire que $M$ est semblable à une matrice diagonale et donner une matrice $Q \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}MQ$ soit diagonale.*

## EXERCICE 2: exemple d'endomorphisme dans un espace de fonctions

Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a, t \in \mathbb{R}$, on pose $h_a(t) = \mathrm{e}^{at}$.
Pour tout $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $(\varphi(f))(x) = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$ .

**Q 10** *Montrer que $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\varphi(f)'$.*

**Q 11** *Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$*

**Q 12** *Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $h_a$ est un vecteur propre de l'endomorphisme $\varphi$ et préciser la valeur propre associée.*

**Q 13** *Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$ et que son noyau est l'ensemble des fonctions $f$ périodiques de période 1 qui vérifient : $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$.*

**Q 14** *Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, montrer que la fonction $t \mapsto \cos(2k\pi t)$ appartient à $\ker\varphi$.*

**Q 15** *L'application $\varphi$ est-elle injective? Est-elle surjective?*

# EXERCICE 3:

On considère l'équation différentielle $(1-x^2)\,y'(x) - xy(x) = 1 : (\mathcal{E})$ et un réel $R > 0$.

**Q 16** *Résoudre l'équation homogène $(1-x^2)\,y'(x) - xy(x) = 0 : (\mathcal{H})$ sur l'intervalle $]-1,1[$.*

**Q 17** *Déterminer une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $]-1,1[$ à l'aide de la méthode de variation de la constante. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $]-1,1[$.*

**Q 18** *Soit $\sum a_n x^{2n+1}$ une série entière de rayon de convergence $R$. On pose, pour $x \in ]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.*

1. *Montrer que $f$ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si ( $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n+3)\,a_{n+1} = (2n+2)\,a_n$).*
2. *Montrer que $f$ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{4^n n!^2}{(2n+1)!}$.*
3. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{4^n n!^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.*

**Q 19** *Justifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{Arc\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser ce développement.*

# PROBLEME:

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

On pose $K_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_7(\mathbb{C})$.

On pose, $k \in [[0, n-1]]$, $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$.

## Première partie: Puissances de $K_n$, éléments propres de $K_n$ et application

**Q 20** *Soit $f_n$ l'endomorphisme canoniquemement associé à $K_n$ et $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Déterminer, pour $j \in [[1, n]]$ l'image de $E_j$ par $f_n^2$. En déduire la matrice $K_n^2$.*
*Soit $i \in [[1, n]]$. Déterminer, pour $j \in [[1, n]]$ l'image de $E_j$ par $f_n^i$. En déduire la matrice $K_n^i$.*

**Q 21** *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $K_n$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. En calculant de deux manières $K_n^n \times X$, montrer que $\lambda^n = 1$.*
*En déduire que $sp(K_n) \subset \{\omega_k, k \in [[0, n-1]]\}$*

**Q 22** *Déterminer le polynôme caractéristique de $K_n$. En déduire que $sp(K_n) = \{\omega_k, k \in [[0, n-1]]\}$ et que $K_n$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
*Préciser la dimension des sous-espaces propres.*

**Q 23** *Déterminer le sous-espace propre de $K_n$ associé à la valeur propre $\omega_k$. On notera $U_k$ un vecteur propre de $K_n$ de première composante 1.*

**Q 24** *Donner une matrice $P_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telle que*

$$P_n^{-1} K_n P_n = D_n$$

Soit $f : \mathcal{M}_{7,1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{7,1}(\mathbb{C})$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M$ et $(E_1, \ldots, E_7)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{7,1}(\mathbb{C})$.

**Q 25** *Montrer que le sous-espace vectoriel $vect(E_1, E_3, E_5)$ est stable par $f$.*

**Q 26** *Montrer que la matrice $M$ est semblable à la matrice diagonale par blocs $\left(\begin{array}{c|c} K_3 & 0 \\ \hline 0 & K_4 \end{array}\right)$.*

**Q 27** *Justifier que la matrice $\left(\begin{array}{c|c} P_3 & 0 \\ \hline 0 & P_4 \end{array}\right)$ est inversible et exprimer son inverse à l'aide des matrices $P_3$ et $P_4$.*

**Q 28** *Montrer que la matrice $M$ est semblable dans $\mathcal{M}_7(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale à préciser.*

## Deuxième partie:

On pose $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Soit $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. et $H$ le sous-espace vectoriel de $E$ d'équation $z_1 + \cdots + z_n = 0$. On pose $B = \frac{1}{2}(I_n + K_n)$.

**Q 29** *Justifier que pour $k \in [[0, n-1]]$, le vecteur $U_k$ est un vecteur propre de $B$.*

**Q 30** *Montrer que $(U_1, \ldots, U_{n-1})$ est une base de $H$.*

**Q 31** *Montrer que si $Z \in H$, alors la suite $(B^p Z)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_{\mathbb{C}^n}$. (On pourra utiliser la question précédente).*

On considère un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point $M$ de coordonnées $(x, y)$, on associe le complexe $z_M = x + iy$ appelé affixe de $M$. Si $M$ et $N$ sont deux points du plan, le milieu du segment $[MN]$ est le point d'affixe $\frac{1}{2}(z + z')$. On considère un polygone $\mathcal{P}_0$ à $n$ sommets $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ du plan. On note $z_i$, l'affixe du point $A_i$. Le centre du polygone est le point d'affixe $\frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$ et on suppose que ce centre est le point $O$. On définit par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ le polygone $\mathcal{P}_k = \left(P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, \ldots, P_n^{(k)}\right)$ de la manière suivante:
- Pour $i \in [[1, n]]$, on a $P_i^{(0)} = A_i$
- Le point $P_1^{(k+1)}$ est le milieu du segment $\left[P_n^{(k)}, P_1^{(k)}\right]$ et pour $i \in [|2, n|]$ le point $P_i^{(k+1)}$ est le milieu du segment $\left[P_{i-1}^{(k)}, P_i^{(k)}\right]$.

**Q 32** *Représenter les polygones $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ sur une figure lorsque $n = 3$ et $\mathcal{P}_0$ est le triangle de sommets les points d'affixes respectives 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$.*

**Q 33** *Soit $r > 0$. Montrer qu'il existe un entier $k_0$ tel que pour tout $k \geq k_0$, le polygone $\mathcal{P}_k$ est à l'intérieur du disque de centre $O$ et de rayon $r$.*

## Troisième partie: Déterminant circulant

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & & \ddots & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.

**Q 34** *Exprimer la matrice $A$ comme combinaison linéaire des matrices $I_n, K_n, K_n^2, \ldots, K_n^{n-1}$.*

**Q 35** *En déduire que la matrice $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser une matrice diagonale semblable à $A$.*

**Q 36** *En déduire que* $\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_i \omega_k^i\right)$.

# Exercice 1:

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$, et $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
Soit $f$ et $g$ les endomorphismes canoniquement associés respectivement à $A$ et $B$. Soit $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

**R 1** *On a* $rg(f) = rg(A) = 1$ *et* $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$ *et* $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$ *donc* $\dim(\ker(f)) = 2 - rg(f) = 1$.
*On remarque que* $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *donc* $u_1 = e_1 - 2e_2 \in \ker(f)$.

**R 2** *On a* $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *donc* $f(u_2) = 3u_2$.

**R 3** *La famille* $(u_1, u_2)$ *est une famille libre de* $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ *donc base de* $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
*On a* $mat_{(u_1,u_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *car* $f(u_1) = 0$ *et* $f(u_2) = 3u_2$.
*Or* $A = mat_{(e_1,e_2)}(f)$ *donc* $P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D_1$ *avec* $P_1 = P_{(e_1,e_2)\to(u_1,u_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

**R 4** $P(x) = \det(xI_2 - B) = \begin{vmatrix} x+3 & -2 \\ 12 & x-7 \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. *Posons* $\lambda_1 = 1$ *et* $\lambda_2 = 3$.
*On a* $P(\lambda_i) = \det(\lambda_i I_2 - B) = \det(\lambda_i id - g) = 0$ *donc* $\ker(\lambda_i id - g) \neq \{0_{2,1}\}$.

**R 5** *Soit* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. *On a* $AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = 0$.
*On a donc* $B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *donc si* $v_1 = e_1 + 2e_2$ *alors* $g(v_1) = v_1$.
*De même* $BX = 3X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -3x_1 + x_2 = 0$.
*On a donc* $B\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *donc si* $v_2 = e_1 + 3e_2$ *alors* $g(v_2) = 3v_2$

**R 6** *En procédant comme précédemment, la matrice* $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *est inversible et* $P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D_2$.

**R 7** *Soit* $b_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ *la base canonique de* $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ *et* $\varphi$ *l'endomorphisme canoniquement associé à* $M$*:*
*On a* $mat_{b_0}(\varphi) = M$ *et* $\begin{cases} \varphi(e_1) = 2e_1 + 2e_3 \in vect(e_1, e_3) \\ \varphi(e_3) = e_1 + e_3 \in vect(e_1, e_3) \end{cases}$ *et* $\begin{cases} \varphi(e_2) = -3e_2 - 12e_4 \in vect(e_2, e_4) \\ \varphi(e_3) = 2e_2 + 7e_4 \in vect(e_2, e_4) \end{cases}$.
*On en déduit que* $vect(e_1, e_3)$ *et* $vect(e_2, e_4)$ *sont stables et si* $b_1 = (e_1, e_3 e_2, e_4)$, *on a* $mat_{b_1}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$.
*On en déduit que* $P_3^{-1}MP_3 = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ *avec* $P_3 = P_{b_0}^{b_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**R 8** *Le produit par bloc donne* $\left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & P_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & P_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & I_2 \end{array}\right) = I_4$ *donc* $P_4 = \left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & P_2 \end{array}\right)$ *est inversible et* $P_4^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1} & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & P_2^{-1} \end{array}\right)$.
*Le produit par bloc donne* $P_4^{-1}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)P_4 = \left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1} & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & P_2^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & P_2 \end{array}\right)$
$= \left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1} & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & P_2^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} AP_1 & 0 \\ \hline 0 & BP_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1}BP_1 & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & P_2^{-1}BP_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array}\right)$.

**R 9** *On a* $P_3^{-1}MP_3 = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ *et* $P_4^{-1}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)P_4 = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array}\right)$ *donc* $P_4^{-1}P_3^{-1}MP_3P_4 = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array}\right)$ *qui est diagonale. La matrice* $Q = P_3P_4$ *est inversible d'inverse* $Q^{-1} = P_4^{-1}P_3^{-1}$ *donc* $Q^{-1}MQ = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array}\right)$ *est diagonale.*

# Exercice 2:

**R 10** *Si* $f$ *est une fonction continue, alors, d'après le théorème fondamental de l'analyse, elle admet une primitive* $F$ *de classe* $\mathcal{C}^1$*, et on a :*

$$\varphi(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_x^{x+1} = F(x+1) - F(x)$$

*Ainsi* $\varphi(f)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *par composée puis différence de fonctions* $\mathcal{C}^1$*, et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(f)'(x) = f(x+1) - f(x).$$

**R 11** • *D'après la question précédente, pour tout* $f \in E, \varphi(f)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *donc continue donc appartient à* $E$*.*
• *Pour tout* $f, g \in E$*, tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*, et tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$\varphi(\lambda f+g)(x) = \int_x^{x+1} (\lambda f+g)(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \lambda f(t) + g(t)\mathrm{d}t \quad \text{(linéarité de l'évaluation en } t\text{)} = \lambda \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+1} g($$

*Donc* $\varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$ *i.e.* $\varphi$ *est linéaire.*
*Ainsi* $\varphi$ *est un endomorphisme de* $E$*.*

**R 12** • *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a :* $\varphi(h_0)(x) = \int_x^{x+1} h_0(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} 1\ \mathrm{d}t = 1 = h_0(x)$*, d'où* $\varphi(h_0) = h_0$.
*De même, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$\varphi(h_a)(x) = \int_x^{x+1} h_a(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \mathrm{e}^{at}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{at}}{a}\right]_x^{x+1} = \frac{\mathrm{e}^a - 1}{a}\mathrm{e}^{ax},$$

*d'où* $\varphi(h_a) = \lambda_a h_a$ *avec* $\lambda_a = \frac{\mathrm{e}^a - 1}{a}$.

**R 13** • *Soit* $f \in \ker\varphi$*. on a* $\varphi(f) = 0_E$ *donc*
*d'une part,* $\varphi(f)(0) = 0$ *donc* $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$ *et d'autre part d'après la première question,*
*la fonction* $\varphi(f)$ *est dérivable* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f)'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$ *car* $\varphi(f) = 0$*. On a donc bien*
$\begin{cases} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \\ f \text{ est 1-périodique} \end{cases}$

• *Réciproquement, si ces deux conditions sont vérifiées, on sait que l'intégrale d'une fonction périodique sur un segment dont la longueur est la période ne dépend pas du segment choisi i.e. :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$$

*( Celà se démontre par relation de Chasles et changement de variable (translation). Donc $f$ appartient à $\ker\varphi$. Ainsi, par double inclusion, on a montré :*

$$\ker\varphi = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+1) \right\}.$$

**R 14** *Simple vérification*

**R 15** *D'après la question précédente, $\ker\varphi \neq \{0\}$ donc $\varphi$ n'est pas injective.*
*D'après la première question, on a $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \neq E$ donc $u$ n'est pas surjective.*
*Remarque : la non injectivité et la non surjectivité ne sont pas équilvalente pour l'endomorphisme $\varphi$, car $E$ n'est pas de dimension finie. Il faut donc bien les justifier séparément.*

# EXERCICE 3:

**R 16** *On a* $(H) : (1-x^2)\,y'(x) - xy(x) = 0 \iff y'(x) - \dfrac{x}{1-x^2}y(x) = 0$ *sur* $]-1,1[$.
*Une primitive de* $x \mapsto -\dfrac{x}{1-x^2}$ *est* $x \mapsto A(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$. *Les solutions de $(H)$ sont les fonctions*
$x \mapsto \lambda e^{-A(x)} = \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)} = \lambda e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

**R 17** *L'équation différentielle est linéaire du premier ordre.*
*Appliquons la méthode de variation de la constante. Posons* $y(x) = \dfrac{z(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
$(1-x^2)\,y'(x) - xy(x) = 1 \iff (1-x^2)\dfrac{z'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \iff z'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. *Donc* $z(x) = Arc\sin(x)$ *convient et* $y_P(x) = \dfrac{Arc\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ *est une solution particulière de l'équation.*
*Les solutions sont les fonctions* $y(x) = \dfrac{Arc\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$.

**R 18** *Soit* $\sum a_n x^{2n+1}$ *une série entière de rayon de convergence $R$. On pose, pour* $x \in ]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

1. *On peut dériver terme à terme une série entière sur* $]-R,R[$ *donc si* $x \in ]-R,R[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\,a_n x^{2n}$
   *(on garde $n=0$ car $x^{2\times 0+1} = x^1$).*

$$\begin{aligned}
(1-x^2)\,f'(x) - xf(x) = 1 &\iff (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\,a_n x^{2n} - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} = 1 \\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\,a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\,a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = 1 \\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\,a_n x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)\,a_{n-1} x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{2n} = 1 \\
&\iff a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((2n+1)\,a_n - (2n)\,a_{n-1}\right)x^{2n} = 1 \\
\text{(unicité du DSE)} \quad &\iff \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ (2n+1)\,a_n - 2n a_{n-1} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

*donc $f$ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si ( $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n+3)\,a_{n+1} = (2n+2)\,a_n$).*

2. *Posons* $b_n = \dfrac{4^n n!^2}{(2n+1)!}$. *On a* $b_0 = 1$ *et* $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{4^{n+1}(n+1)!^2}{(2n+3)!}\dfrac{(2n+1)!}{4^n (n!)^2} = \dfrac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \dfrac{2n+2}{2n+3}$ *donc* $(b_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, (2n+3) b_{n+1} = (2n+2) b_n)$. *Cette suite* $(b_n)$ *est donc l'unique suite vérifiant les conditions de la question précédente. On en déduit que* $f$ *est solution de* $(\mathcal{E})$ *si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{4^n n!^2}{(2n+1)!}$.

3. *Posons* $u_n = a_n x^{2n+1}$. *Pour* $x \neq 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a_{n+1}x^2}{a_n} = \dfrac{2n+2}{2n+3}x^2$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = x^2$. *Si* $x^2 < 1$ *alors* $\sum u_n$ *converge et si* $x^2 > 1$ *alors* $\sum u_n$ *diverge. On en déduit que* $R = 1$.

**R 19** *Comme on a raisonné par équivalence dans les questions 1 et 2, on en déduit que la fonction* $f$ *est solution de l'équation* $(\mathcal{E})$ *sur* $]-1,1[$. *On peut appliquer le théorème de Cauchy à l'équation* $(\mathcal{E})$ *sur* $]-1,1[$ *car* $(1-x^2)$ *ne s'annule pas sur cet intervalle. On a* $f(0) = 0$ *et si* $y_P(x) = \dfrac{Arc\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ *alors* $y_P(0) = 0$. *Les fonctions* $f$ *et* $y_P$ *sont solutions de* $(\mathcal{E})$ *donc* $f = y_P$ *donc* $\forall x \in ]-1,1[$, $\dfrac{Arc\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{4^n n!^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

# PROBLEME:

**Notation 1** *Si* $\lambda_1, \dots \lambda_n$ *sont* $n$ *scalaires,* $diag(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ *est la matrice carrée de taille* $n$ *diagonale dont les éléments diagonaux sont, dans l'ordre,*$\lambda_1, \dots \lambda_n$.

## Première partie: Puissances de $K_n$, éléments propres de $K_n$

**R 20** *Les images des vecteurs de la base canonique par* $f_n$ *sont donnés par:*
$E_1 \mapsto E_2 \mapsto E_3 \mapsto \cdots \mapsto E_{n-1} \mapsto E_n \mapsto E_1$ *donc*

$$\text{par } f^2 : \begin{cases} E_1 & \mapsto & E_3 \\ E_2 & \mapsto & E_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{n-2} & \mapsto & E_n \\ E_{n-1} & \mapsto & E_1 \\ E_n & \mapsto & E_2 \end{cases} \quad \text{et } K_n^2 = mat_{(E_1,\dots,E_n)}(f_n^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Soit* $i \in [[1, n-1]]$; *On obtient de même que,*

$$\text{par } f^i : \begin{cases} E_1 & \mapsto & E_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{n-i} & \mapsto & E_n \\ E_{n-i+1} & \mapsto & E_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E_n & \mapsto & E_i \end{cases} \quad \text{donc } K_n^i = mat_{(E_1,\dots,E_n)}(f_n^i) \text{ peut être écrite par blocs: } \left(\begin{array}{c|c} 0_{i,n-i} & I_i \\ \hline I_{n-i} & 0_{n-i,i} \end{array}\right)$$

*et* $\forall i \in [[1,n]]$, $f_n^n(E_i) = E_i$ *donc* $K_n^n = mat_{(E_1,\dots,E_n)}(f_n^n) = I_n$.

**R 21** $X$ *est vecteur propre de* $K_n$ *associé à* $\lambda$ *donc* $K_n X = \lambda X$ *d'où*
$(K_n)^2 X = K_n(K_n X) = K_n \lambda X = \lambda K_n X = \lambda^2 X$. *Par récurrence immédiate, pour tout* $i \in \mathbb{N}$, $(K_n)^i X = \lambda^i X$
,$(K_n)^n = I_n$ *donc* $(K_n)^n \times X = I_n \times X = X$.
*On en déduit que* $\lambda^n X = X$ *et comme* $X \neq 0$ *car* $X$ *vecteur propre;* $\lambda^n = 1$.
*D'après le cours, l'équation* $z^n = 1$ *admet comme ensemble de solutions complexes* $\{\omega_k, k \in [[0, n-1]]\}$ *donc* $sp(K_n) \subset \{\omega_k, k \in [[0, n-1]]\}$.

**R 22** *Le polynôme caractéristique de $K_n$ est défini par $P(x) = \det(xI_n - K_n) =$*
$$\left|\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & x & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{pmatrix}\right|_n \underset{dev/C_n}{=} x\left|\begin{pmatrix} x & \ddots & 0 \\ -1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}\right|_{n-1} + (-1)^{n+2}\left|\begin{pmatrix} -1 & x & \ddots & \\ 0 & -1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}\right|_{n-1}$$
*Donc $P(x) = x^n - 1$ L'équation $x^n = 1$ admet $n$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$ ($\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, $k \in [[0, n-1]]$) et $K_n$ est de taille $n$ donc $K_n$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.*

**R 23** *Soit* $AX = \omega_k X \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \omega_k x_1 \\ x_1 = \omega_k x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \omega_k x_n \end{cases}$ *soit* $\begin{cases} x_1 = (\omega_k)^{-1} x_n \\ x_2 = (\omega_k)^{-1} x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega_k)^{-1} x_n \end{cases}$. *En prenant $x_1 = 1$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k^{-1} \\ \vdots \\ \left(\omega_k^{-1}\right)^{n-2} \\ \left(\omega_k^{-1}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$*
*(noté $U_k$ dans la suite), obtenu avec les $n-1$ dernières équations, et la première équation équivaut à $x_1 = \left(\omega_k^{-1}\right)^n x_1$ qui est vérifiée car $\omega_k^n = 1$. On en déduit que $E_{\omega_k}(A) = vect(U_k)$.*

**R 24** *La famille $(U_0, \ldots, U_{n-1})$ est libre car formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Soit $P_n$ la matrice de passage de la base canonique à cette base.*
*On a $P_n = (U_0|\cdots|U_{n-1})$ et $P_n^{-1} K_n P_n = D_n$ avec $D_n = diag(1, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$.*

**R 25** *Soit $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M$ et $(E_1, \ldots, E_7)$ la base canonique de $\mathbb{C}^7$. Posons $F_1 = vect(E_1, E_3, E_5)$. On a $f(E_1) = E_3 \in F$, $f(E_3) = E_5 \in F$ et $f(E_5) = E_1 \in F$ donc $F_1$ est stable par $f$.*

**R 26** *Posons $F_2 = vect(E_2, E_7, E_4, E_6)$. On montre de même que $F_2$ est stable par $f$. La famille $b = (E_1, E_3, E_5, E_2, E$ est permutation de la base canonique donc est une base de $\mathbb{C}^7$ et en utilisant les images des vecteurs de cette base, $mat_b(f) = \left(\begin{array}{c|c} K_3 & 0 \\ \hline 0 & K_4 \end{array}\right)$.*

**R 27** *Soit $P = \left(\begin{array}{c|c} P_3 & 0 \\ \hline 0 & P_4 \end{array}\right)$ et $R = \left(\begin{array}{c|c} P_3^{-1} & 0 \\ \hline 0 & P_4^{-1} \end{array}\right)$. Les règles du produit par bloc donnent $PR = \left(\begin{array}{c|c} I_3 & 0 \\ \hline 0 & I_4 \end{array}\right) = I_7$ donc $P$ est inversible d'inverse $R$.*

**R 28** *la matrice $M$ est semblable est semblable à $M_1 = \left(\begin{array}{c|c} K_3 & 0 \\ \hline 0 & K_4 \end{array}\right)$ et les règles du produit par bloc donnent $P^{-1}\left(\begin{array}{c|c} K_3 & 0 \\ \hline 0 & K_4 \end{array}\right)P = \left(\begin{array}{c|c} P_3^{-1}K_3P_3 & 0 \\ \hline 0 & P_4^{-1}K_4P_4 \end{array}\right) = diag(1, j, j^2, 1, i, -1, -i) = D$ donc $M$ est semblable à $M$ (transitivité de la relation "est semblable à").*

# Deuxième partie:

**R 29** *On a $BU_k = \frac{1}{2}(I_n + K_n)U_k = \frac{1}{2}(U_k + K_nU_k) = \frac{1+\omega_k}{2}U_k$ . On en déduit que $U_k$ est un vecteur propre de $B$ associé à la valeur propre $\frac{1+\omega_k}{2}$.*

**R 30** *Si $k \in [[1, n-1]]$ pour $Z = U_k$, on a $z_1 + \cdots + z_n = 1 + \left(\omega_k^{-1}\right) + \cdots + \left(\omega_k^{-1}\right)^{n-1} = \dfrac{1 - \omega_k^{-n}}{1 - \omega_k} = 0$ car $\omega_k \neq 1$ donc $U_k \in H$. La famille $(U_1, \ldots, U_{n-1})$ est libre et $\dim(H) = n - 1$ (équation d'hyperplan de $\mathbb{C}^n$) donc $(U_1, \ldots, U_{n-1})$ est une base de $H$.*

**R 31** *Soit* $Z \in H$. *On peut écrire* $Z = \sum_{k=1}^{n-1} a_k U_k$ *donc* $B^p X = B^p \sum_{k=1}^{n-1} a_k X_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k B^p X_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \left(\frac{1+\omega_k}{2}\right)^p X_k$. *Or* $\left|\frac{1+\omega_k}{2}\right| < 1$ *(il n'y a pas égalité dans l'inégalité triangulaire car* $\omega_k$ *et* $1$ *n'ont pas meme argument) donc* $\lim_{p\to+\infty} \left(\frac{1+\omega_k}{2}\right)^p = 0$. *On en déduit quela suite* $\left(B^p Z\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $0$.

**R 32** *La figure ne présente pas de difficulté...*

**R 33** *Posons* $Z_0 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ *(respectivement* $Z_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$*) le vecteur dont les composantes sont les affixes des points* $\mathcal{P}_0$ *(respectivement* $\mathcal{P}_1$*) dans l'ordre.. On a* $t_1 = \frac{1}{2}(z_n + z_1)$, $t_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, $\ldots$ , $t_n = \frac{1}{2}(z_{n-1} + z_n)$ *donc* $Z_1 = BZ_0$. *De même, si* $Z_k$ *est le vecteur dont les composantes sont les affixes des points* $\mathcal{P}_k$, *on a* $Z_{k+1} = BZ_k$ *et donc, par récurrence, on montrer que* $Z_k = B^k Z_0$. *Or* $Z_0 \in H$ *car le centre de* $\mathcal{P}_0$ *est le point* $O$ *donc* $\lim_{k\to+\infty} Z_k = 0_{\mathbb{C}^n}$. *Soit* $r > 0$. *Posons* $Z_k = \begin{pmatrix} z_1(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{pmatrix}$. *On a* $\lim_{k\to+\infty} z_1(k)$ *donc il existe* $k_1 \in \mathbb{N}$ *à partir duquel* $|z_1(k)| < r$. *On définit de même* $k_2, \ldots, k_n$. *En posant* $k_0 = \max\{k_i, 1 \le i \le n\}$, *si* $k \ge k_0$, *le polygone* $\mathcal{P}_k$ *est à l'intérieur du disque de centre* $O$ *et de rayon* $r$.

# Troisième partie: Déterminant circulant

**R 34** *D'après les calculs précédents sur les puissances de* $K_n$, *on a* $A = a_0 I_n + a_1 K_n + \cdots + a_{n-1} K_n^{n-1}$.

**R 35** *On a* $P_n^{-1} A P_n = P_n^{-1}\left(a_0 I_n + a_1 K_n + \cdots + a_{n-1} K_n^{n-1}\right) P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_i P_n^{-1} K_n^i P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_i \left(P_n^{-1} K_n P_n\right)^i$

$P_n^{-1} A P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_i D_n^i = diag(\sum_{k=0}^{n-1} a_i \omega_0^i, \sum_{k=0}^{n-1} a_i \omega_1^i, \ldots, \sum_{k=0}^{n-1} a_i \omega_{n-1}^i)$.

**R 36** *On a* $\det(A) = \det\left(P_n^{-1} A P_n\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_i \omega_k^i\right)$.