DM 7 (pour le 9 novembre 2026)

Exercice 1

On considère $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel.On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Q 1 *Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer une base orthogonale de $\mathcal{F}$.*

Q 2 *Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$. Déterminer le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$.*

Q 3 *Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.*

Exercice 2

Soit a et b deux réels, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant: $\forall x \in [a,b], f(x) > 0$.

Q 4 *Montrer que* $\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right) \geqslant (b-a)^2$.

Q 5 *Déterminer la borne inférieure de*
$\mathcal{E} = \left\{ \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right), f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \ \textit{vérifiant} : \forall x \in [a,b], f(x) > 0 \right\}$

Problème: Deux méthodes pour la réduction des matrices définies par blocs

Attention 1 *Située dans la dernière partie, la deuxième méthode présentée ici est souvent à la base d'exercices d'oral de concours.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $B_A = \left(\begin{array}{c|c} A & 2A \\ \hline A & 2A \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\begin{pmatrix} X \\ \hline Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

On rappelle que si $(M,N,P,Q) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^4$, alors $\left(\begin{array}{c|c} M & P \\ \hline N & Q \end{array}\right)\begin{pmatrix} X \\ \hline Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MX+PY \\ \hline NX+QY \end{pmatrix}$ et
si $(\lambda,\lambda') \in \mathbb{R}^2$, $(X,X',Y,Y') \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\lambda\begin{pmatrix} X \\ \hline Y \end{pmatrix} + \lambda'\begin{pmatrix} X' \\ \hline Y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda X+\lambda' X' \\ \hline \lambda Y+\lambda' Y' \end{pmatrix}$

Etude d'un exemple:

Soit $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
On se propose de diagonaliser A_0 sans calculer le polynôme caractéristique de A_0 en "devinant" les valeurs propres et les vacteurs propres de A_0.
Soit f canoniquement associée à A_0 et $b_0 = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Q 6 *Quel vecteur de la base canonique est vecteur propre de f ?*

Q 7 *En examinant deux colonnes de A_0, déterminer un élément du noyau de f.*

Q 8 *Que peut-on dire de la somme des coefficients d'une lignes de A_0 ? En déduire une valeur propre et un vecteur propre de f.*

Q 9 *Les questions précédentes donnent 3 valeurs propres de multiplicité au moins 1.*
En utilisant la somme des valeurs propres complexes de A_0, montrer que l'une de ces valeurs propres est de multiplicité 2.

Q 10 *Montrer que A_0 est diagonalisable et diagonaliser A_0.*

Question préliminaire

Q 11 *Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X' = \begin{pmatrix} X \\ \hline X \end{pmatrix}$. Montrer que si X est vecteur propre de A, alors X' est vecteur propre de B_A.*

Etude du rang de B_A:

On note r le rang de la matrice A.

Manipulation de lignes et colonnes

Q 12 *Montrer que B_A est de même rang que $\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline A & 0_{n,n} \end{array}\right)$.*

Q 13 *Montrer que B_A est de même rang que $\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline 0_{n,n} & 0_{n,n} \end{array}\right)$.*

Q 14 *Exprimer le rang B_A en fonction du rang de A.*

Utilisation du produit par blocs

Q 15 *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $M = \left(\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$. Donner une valeur de α pour laquelle $B_A \times M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline A & 0_{n,n} \end{array}\right)$.*

Q 16 *Déterminer une matrice $N \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $N \times \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline A & 0_{n,n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline 0_{n,n} & 0_{n,n} \end{array}\right)$.*

Q 17 *Conclure.*

Recherche des sous-espaces propres de B_A et diagonalisation

Q 18 *Montrer que 0 est valeur propre de B_A et $\dim(E_0(B_A)) = 2n - r$.*

Q 19 *Soit f l'application linéaire canoniquement associée à B_A et $(e_1, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.*

- *Comparer $f(e_i)$ et $f(e_{n+i})$.*
- *En déduire une famille $(U_1, \ldots, U_n)$ de $\ker(f)$ et justifier que cette famille est libre.*
- *On suppose que $rg(A) = n$. Justifier que $(U_1, \ldots, U_n)$ est une base de $E_0(B_A)$.*

Q 20 *On suppose que* $rg(A) < n$. *Donner la dimension de* $E_0(A)$.
Soit $(V_1, \ldots, V_{n-r})$ *une base de* $E_0(A)$. *En utilisant la question 11, construire une famille* $(W_1, \ldots, W_{n-r})$ *de* $E_0(B_A)$.
Justifier que la famille obtenue $(U_1, \ldots, U_n, W_1, \ldots, W_{n-r})$ *obtenue en juxtaposant les deux familles obtenues précédemment est une base de* $E_0(B_A)$.

Q 21 *Soit* λ *une valeur propre non nulle de* A. *Justifier que* 3λ *est valeur propre de* B_A *et que* $\dim(E_\lambda(A)) \leq \dim(E_{3\lambda}(B_A))$.

Q 22 *On suppose que* A *est diagonalisable. Montrer que* B_A *est diagonalisable.*

Application

Q 23 *Diagonaliser* B_{A_0}.

Autre méthode: Utilisation du calcul matriciel par blocs

On pose $C_A = \left(\begin{array}{c|c} A & 2A \\ \hline 2A & A \end{array}\right)$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. L'dée de cette partie est de diagonaliser C et d'utiliser ce résultat pour travailler sur C_A, via des matrices par blocs.

Q 24 *Déterminer une matrice* $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $P^{-1}CP$ *est diagonale.*

Q 25 *Calculer* P^{-1}.

La matrice scalaire de taille n associée à un scalcaire α est la matrice aI_n.

La matrice bloc M_{bloc} associée à une matrice M est la matrice obtenue en remplaçant les coefficients de la matrices M par des matrices scalaires (de taille n) associées

Q 26 *Justifier que* P_{bloc} *et* $(P^{-1})_{bloc}$ *sont inversibles et inverses l'une de l'autre.*

Q 27 *Calculer* $(P^{-1})_{bloc} C_A P_{bloc}$.

Q 28 *On suppose que* A *est diagonalisable. Montrer que* C_A *est diagonalisable.*

Corrigé DM 7

Exercice 1

R 1 $\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a \end{pmatrix} = a\mathrm{I}_2 + bK$ *avec* $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ *donc* $\mathcal{F} = Vect(\mathrm{I}_2, K)$.
On peut donc affirmer que $\mathcal{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
$\mathcal{F} = Vect(\mathrm{I}_2, K)$ *donc* (I_2, K) *est une famille génératrice de* $\mathcal{F}$.
De plus, I_2 *et* K *sont non colinéaires donc la famille* (I_2, K) *est libre.*
On en déduit que (I_2, K) *est une base de* $\mathcal{F}$
On a $(I_2|K) = tr(\mathrm{I}_2^T \times K) = tr(K) = 0$ *donc* (I_2, K) *est une base othogonale de* $\mathcal{F}$.

R 2 *Soit* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
La formule du projeté orthogonale adaptée aux bases seulement orthogonales donne

$$p(M) = \frac{(\mathrm{I}_2|M)}{\|\mathrm{I}_2\|^2}\mathrm{I}_2 + \frac{(K|M)}{\|K\|^2}K = \frac{a+d}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{b-2c}{5}K = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b-2c}{5} \\ \frac{4c-2b}{5} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix}.$$

R 3 *On a* $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p(J)\|$. *Or d'après la question précédente,* $p(J) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$

donc $J - p(J) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$ *donc* $d(J, \mathcal{F}) = \frac{1}{5}\sqrt{3^2 + 6^2} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$.

Exercice 2

R 4 *On considère le produit scalaire usuel* $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ *défini par :*
$\forall (f,g) \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
Les fonctions $g = \sqrt{f}$ *et* $h = \dfrac{1}{\sqrt{f}}$ *sont continues sur* $[a,b]$ *donc*
On a $\|g\|^2 = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, $\|h\|^2 = \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$ *et*
On a $(g|h)^2 = \left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $(g|h)^2 \leq \|g\|^2 \|h\|^2$ *donc* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.

R 5 *Si on considère la fonction* $f : t \longmapsto 1$„ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$ *donc* $(b-a)^2 \in \mathcal{E}$
Or $(b-a)^2$*.est un minorant de* $\mathcal{E}$ *donc* $\mathcal{E}$ *admet un minimum (donc une borne inférieure) égal (e) à* $(b-a)^2$.
Remarque: On pouvait aussi s'intéresser au cas d'égalité de CS qui est est (g,h) *liée, ce qui donne* $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f} = \lambda\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ *c'est-à-dire* f *est une fonction constante.(on retrouve la fonction* $t \mapsto 1$*).*

Problème

R 6 *On remarque que* $f(e_2) = e_2$ *donc* e_2 *est vecteur propre associé à la valeur propre* $\lambda_1 = 1$.

R 7 *On a* $C_1 = C_3$ *donc* $f(e_1) = f(e_3)$ *donc* $f(e_3 - e_1) = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} = 0.(e_3 - e_1)$ *donc* $e_3 - e_1$ *est vecteur propre de* A_0 *associé à la valeur propre* $\lambda_2 = 0$.
On a $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_0(A_0)$. *La somme des coefficients de chaque ligne de* A_0 *vaut* 3. *On a* $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *donc* $\lambda_3 = 3$ *est valeur propre et un vecteur propre de* A_0 *et* $U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_0(A_0)$.

R 8 *Le polynôme caractéristique* χ_{A_0} *est scindé dans* $\mathbb{C}[X]$.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *les* 4 *valeurs propres complexes de* A_0 *comptées avec multiplicité. On* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = tr(A_0) = 5$ *donc* $\lambda_4 = 1$ *donc* 1 *est valeur propre de multiplicité* 2.

R 9 *Détermination de* $E_1(A_0)$*:*
$$A_0X = X \Leftrightarrow (A_0 - I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U_2}.$$
On a donc $E_{1(A_0)} = vect(U_1, U_2)$ *et comme* $vect(U_1, U_2)$ *est libre, c'est une base de* $E_1(A_0)$.

R 10 *D'après ce qui précède,* $\dim(E_1(A_0)) = 2$, $\dim(E_0(A_0)) \geq 1$ *et* $\dim(E_3(A_0)) \geq 1$ *donc* $\dim(E_1(A_0)) + \dim(E_0(A_0)) + \dim(E_3(A_0)) \geq 4$ *donc* A_0 *est diagonalisable.*
On a $sp(A_0) = \{1, 0, 3\}$ *et* $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = E_1(A_0) \oplus E_0(A_0) \oplus E_3(A_0)$ *et* $\dim(E_0(A_0)) = 1$ *et* $\dim(E_3(A_0)) = 1$. *La juxtaposition* (U_1, U_2, U_3, U_4) *des bases des sous-espaces propres est donc une base de* $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. *En posant* $P = P_{(e_1,e_2,e_3,e_4)\to(U_1,U_2,U_3,U_4)}$, *la formule de changment de base donne* $P^{-1}A_0P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

.1 Question préliminaire

R 11 *On a* $B_AX' = \left(\begin{array}{c|c} A & 2A \\ \hline A & 2A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} X \\ \hline X \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} AX + 2AX \\ \hline AX + 2AX \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 3\lambda X \\ \hline 3\lambda X \end{array}\right) = 3\lambda\left(\begin{array}{c} X \\ \hline X \end{array}\right)$ *donc et* $X \neq 0$ *(car vecteur propre de A) donc* $X' \neq 0$ *donc* X' *est vecteur propre de* B_A *associé à* 3λ.

Etude du rang de B_A:

On note r le rang de la matrice A.

Utilisation des vecteurs colonnes (première méthode)

Pour toute matrice M, on note $C_j(M)$ le $j^{ème}$ vecteur colonne de M.

R 12 *Les transformations* $C_i \leftarrow C_i - C_{i-n}$ *pour* $i \in [[n+1, 2n]]$ *donne* B_A *de même rang que* $\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline A & 0_{n,n} \end{array}\right)$.

R 13 *Les transformations* $L_i \leftarrow L_i - L_{i-n}$ *pour* $i \in [[n+1, 2n]]$ *donne* $\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline A & 0_{n,n} \end{array}\right)$ *de même rang que* $\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline 0_{n,n} & 0_{n,n} \end{array}\right)$ *donc* B_A *de même rang que* $\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline 0_{n,n} & 0_{n,n} \end{array}\right)$.

R 14 *le rang de* $\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline 0_{n,n} & 0_{n,n} \end{array}\right)$ *est égal au rang de* $\left(\begin{array}{c} A \\ \hline 0_{n,n} \end{array}\right)$
Si $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *alors*
$\lambda_1 C_{i_1}(A) + \cdots + \lambda_{i_k} C_{i_k}(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} C_{i_1}(A) \\ 0_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{i_k} \begin{pmatrix} C_{i_k}(A) \\ 0_{n,1} \end{pmatrix} = 0$ *donc le rang de* $\left(\begin{array}{c} A \\ \hline 0_{n,n} \end{array}\right)$ *est égal au rang de* A.*donc* $rg(B_A) = rg\left(\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline 0_{n,n} & 0_{n,n} \end{array}\right)\right) = rg(A)$.

Utilisation du produit par blocs

R 15 *Pour* $\alpha = -2$, $B_A M = \left(\begin{array}{c|c} A & 2A \\ \hline A & 2A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & -2I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline A & 0_{n,n} \end{array}\right)$.

R 16 *On a* $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline A & 0_{n,n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline 0_{n,n} & 0_{n,n} \end{array}\right)$ *et* $N = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array}\right)$ *est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls donc inversible.*

R 17 - *P inversible* $\Rightarrow rg(PQ) = rg(Q)$ *et Q inversible* $\Rightarrow rg(PQ) = rg(P)$.
Or M et N sont inversibles donc $rg(B_A) = rg(B_A M) = rg(N B_A M) = rg\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline 0_{n,n} & 0_{n,n} \end{array}\right)$.
Or les colonnes éventuellement non nulles de $\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline 0_{n,n} & 0_{n,n} \end{array}\right)$ *sont celles de A prolongées de zéros*
donc $rg\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline 0_{n,n} & 0_{n,n} \end{array}\right) = rg(A)$ *(raisonnement de Q14) donc* $rg(B_A) = rg(A)$.

Recherche des sous-espaces propres de B_A et diagonalisation

R 18 *On a* $rg(B_A) = rg(A)$ *et* $\dim(\ker(B_A)) = 2n - rg(B_A) = 2n - r > 0$ *car* $r \leq n$ *donc* $\ker(B_A) = \ker(B_A - 0I_{2n}) \neq \{0\}$ *et* 0 *est valeur propre de* B_A *et* $\ker(B_A) = E_0(B_A)$ *donc* $\dim(E_0(B_A)) = 2n - r$.

R 19 *Soit f l'application linéaire canoniquement associée à* B_A *et* $(e_1, \ldots, e_{2n})$ *la base canonique de* $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

- *On a* $C_{i+n}(B_A) = 2C_i(B_A)$ *donc* $f(e_{n+i}) = 2f(e_i)$ *donc* $f(2e_i - e_{i+n}) = 0$ *donc* $2e_i - e_{i+n} \in \ker(f)$.
- *Posons* $U_i = 2e_i - e_{i+n}$. *La famille* $(U_1, \ldots, U_n)$ *est une famille de* $\ker(f)$ *et elle est échelonnée donc est libre.*
- *Si* $rg(A) = n$, *alors* $\dim(E_0(B_A)) = n$ *et* $(U_1, \ldots, U_n)$ *est libre donc est une base de* $E_0(B_A)$.

R 20 *On suppose que* $rg(A) < n$. *Le théorème du rang donne* $\dim(E_0(A)) = n - r$.
Soit $(V_1, \ldots, V_{n-r})$ *une base de* $E_0(A)$. *En utilisant la question 11, on obtient que si* $i \in [[1, n-r]]$,$W_i = \left(\begin{array}{c} V_i \\ \hline V_i \end{array}\right)$ *est vecteur propre de* B_A *associé à la valeur propre* $3 \times 0 = 0$. *La famille e* $(W_1, \ldots, W_{n-r})$ *est donc une famille de* $E_0(B_A)$.
Soit des scalaires $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *et* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ *tels que* $\mu_1 U_1 + \cdots + \mu_n U_n + \alpha_1 W_1 + \cdots + \alpha_{n-r} W_{n-r} = 0$.

$$\text{On a } \sum_{i=1}^{n} \mu_i U_i = \begin{pmatrix} 2\mu_1 \\ \vdots \\ 2\mu_n \\ -\mu_1 \\ \vdots \\ -\mu_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 2X \\ \hline -X \end{array}\right) \text{ avec } X = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \text{ et } \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i W_i = \left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i V_i \\ \hline \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i V_i \end{array}\right) \text{ donc } \left(\begin{array}{c} 2X + \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i V_i \\ \hline -X + \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i V_i \end{array}\right) =$$

$\begin{pmatrix} \frac{0_n}{0} \end{pmatrix}$. *On en déduit que* $\begin{cases} 2X + \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i V_i = 0_n \\ -X + \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i V_i = 0_n \end{cases}$. *On en déduit (en soustrayant) que* $X = 0$ *donc* $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$ *et* $\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i V_i = 0_n$ *avec* $(V_1, \ldots V_{n-r})$ *libre donc* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-r} = 0$ *donc* $(U_1, \ldots, U_n, W_1, \ldots, W_{n-r})$ *est une famille libre de* $E_0(B_A)$ *qui est de dimension* $2n - r$ *donc est une base de* $E_0(B_A)$.

R 21 *Soit* λ *une valeur propre non nulle de* A. *Soit* $(V'_1, \ldots, V'_k)$ *une base de* $E_\lambda(A)$. *En utilisant la question 11, on obtient que si* $i \in [[1, k]]$,$W'_i = \begin{pmatrix} \frac{V'_i}{V'_i} \end{pmatrix}$ *est vecteur propre de* B_A *associé à la valeur propre* $3 \times \lambda$ *donc* 3λ *est valeur propre de* B_A *et* $\dim(E_\lambda(A)) \leq \dim(E_{3\lambda}(B_A))$ *car* $(W'_1, \ldots, W'_k)$ *est libre (découle immédiatemnt du fait que* $(V'_1, \ldots, V'_k)$ *libre par des calculs du même type que dans la question précédente).*

R 22 *Supposons que* $r < n$: 0 *est valeur propre de* A. *Notons* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *les valeurs propres non nulles de* A. A *est diagonalisable.donc* $\dim(E_0(A)) + \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_k}(A)) = n$. *Or* $\dim(E_0(A)) = n - r$ *donc* $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_k}(A)) = r$. *D'après la question précédente,* $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{3\lambda_k}(B_A)) \geq r$ *et par ailleurs* $\dim(E_0(B_A)) = 2n - r$ *donc* $\dim(E_0(B_A)) + \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{3\lambda_k}(B_A)) \geq 2n : (\mathcal{I})$ *donc* B_A *est diagonalisable (et* $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{3\lambda_k}(B_A)) = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_k}(A))$ *car il ne peut pas y avoir* $>$ *dans l'inégalité* $(\mathcal{I})$

.2 Application

R 23 *D'après ce qui précède,* $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ *est une base de* $E_0(B_A)$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une base de* $E_3(B_A)$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est une base de* $E_9(B_A)$.

La juxtaposition de ces bases donne une base de $\mathcal{M}_{8,1}(\mathbb{R})$ *et dans cette base,*
la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à B_A *est* $diag(0, 0, 0, 0, 0, 3, 3, 9)$
(et la matrice de passage est obtenue en prenant comme colonnes les colonnes des vecteurs propres).

Autre méthode: Utilisation du calcul matriciel par blocs

R 24 *On remarque que* $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *donc si* $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *alors* P *est inversible et* $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

R 25 *On obtient* $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

R 26 *On a* $P_{bloc} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right)$ *et* $(P)^{-1}_{bloc} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \\ \hline -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \end{array}\right)$ *donc* $P_{bloc}\,(P)^{-1}_{bloc} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \\ \hline -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -0 & I_n \end{array}\right)$

R 27 *De même* $(P)^{-1}_{bloc}\, C_A = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \\ \hline -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} A & 2A \\ \hline 2A & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{3}{2}A & \frac{3}{2}A \\ \hline \frac{1}{2}A & -\frac{1}{2}A \end{array}\right)$ *donc*
$(P)^{-1}_{bloc}\, C_A P_{bloc} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{3}{2}A & \frac{3}{2}A \\ \hline \frac{1}{2}A & -\frac{1}{2}A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 3A & 0 \\ \hline 0 & -A \end{array}\right)$.

R 28 *La matrice* A *est diagonalisable donc il existe* $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ *tel que* $Q^{-1}AQ = D$ *diagonale. Soit* $P_2 = \left(\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$. *On vérifie que* $\left(\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} Q^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$ *donc* $P_2^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} Q^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right)$. *On a* $P_2^{-1}\left(\begin{array}{c|c} 3A & 0 \\ \hline 0 & -A \end{array}\right) P_2 = \left(\begin{array}{c|c} 3Q^{-1}AQ & 0 \\ \hline 0 & -Q^{-1}AQ \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 3D & 0 \\ \hline 0 & -D \end{array}\right)$.
La matrice C_A *est semblabe à* $\left(\begin{array}{c|c} 3A & 0 \\ \hline 0 & -A \end{array}\right)$ *elle même semblable à* $\left(\begin{array}{c|c} 3D & 0 \\ \hline 0 & -D \end{array}\right)$ *qui est diagonale donc* C_A *est semblable à* $\left(\begin{array}{c|c} 3D & 0 \\ \hline 0 & -D \end{array}\right)$ *qui est diagonale donc* C_A *est diagonalisable.*