DM 8 (pour le 16 novembre 2026)

Exercice 3: TRIGONALISATION

Le but de l'exercice est de montrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable et de la trigonaliser sans passer par le calcul du polynôme caractéristique.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$.

Soit A la matrice définie par blocs par $A = \left(\begin{array}{c|c} 2\mathrm{i}\sqrt{n-1} & v^T \\ \hline v & 0_{n-1,n-1} \end{array}\right)$.

Q 1 *Justifier l'existence d'une valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ de A dont le sous espace propre associé est de dimension $n-2$. Déterminer une base de ce sous-espace propre.*

Q 2 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{X})$.*

En résolvant un sysrème linéaire, montrer que l'équation $AX = \lambda X$ admet une solution $X \neq 0$ si et seulement si $\lambda^2 - 2\mathrm{i}\sqrt{n-1}\lambda - (n-1) = 0$.

En déduire que A admet exactement deux valeurs propres et que A n'est pas diagonalisable.

Q 3 *Déterminer une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i\sqrt{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i\sqrt{n-1} & & \cdots & \\ \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = T$*

Exercice 1 *SUITE RECURRENTE LINEAIRE SCALAIRE D'ORDRE 3:*
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations

$$u_0 = -8;\ u_1 = 0;\ u_2 = 5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.*
2. *Calculer le polynôme caractéristique de A.*
3. *Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de X_0, A et n.*
4. *Déterminer les valeurs propres de A. En déduire que A est diagonalisable.*
5. *Déterminer le sous-espace propre $E_{-1}(A)$ associé à la valeur propre A.*
   On admet que $E_2(A) = vect(U_2)$ avec $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $E_{-2}(A) = vect(U_3)$ avec $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   Déterminer une base (U_1, U_2, U_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

6. *Décomposer X_0 dans la base (U_1, U_2, U_3).*

7. *Exprimer, pour $i \in [[1,3]]$, et $n \in \mathbb{N}$, $A^n U_i$ en fonction de U_i.*

8. *En déduire la décomposition de X_n dans la base (U_1, U_2, U_3).*

9. *Donner, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.*

Exercice 2 *SUITE RECURRENTE LINEAIRE VECTORIELLE Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.*

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *(et A_1 est la matrice nulle de taille 1).*

Soit P_n le polynôme caractéristique de A_n.

1. *Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 2$, $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x)$: $(\mathcal{R}_{n,x})$.*

   Comment définir $P_0(x)$ pour que la relation $(\mathcal{R}_{n,x})$ soit aussi vraie pour $n = 0$?

2. *Soit $x \in]-2,2[$. on pose $x = 2\cos(\alpha)$.avec $\alpha \in]0,\pi[$. L'équation $(\mathcal{R}_{n,x})$ peut donc s'écrire:*

$$P_{n+2}(x) - 2\cos(\alpha) P_{n+1}(x) + P_n(x) = 0$$

   Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x)$ en fonction de $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$;
   En déduire que $P_n(x) = \dfrac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$ (je donne ce résultat pour permettre la suite du calcul mais il faut pouvoir l'obtenir sans le connaître)

3. *En déduire que P_n admet n valeurs propres distinctes et que ces valeurs propres appartiennent à $]-2,2[$.*

4. *En déduire que A_n est diagonalisable.*
   Dans la suite, on note $P_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale telles que $D_n = P_n^{-1} A_n P$

5. *Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit par récurrence une suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par récurrence:*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ X_{p+1} = \frac{1}{2} A X_p$$

   (a) *On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $Y_p = P_n^{-1} X_p$. Etablir une relation de récurrence entre Y_{p+1} et Y_p. En déduire que la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.*
   On pourra poser $Y_p = \begin{pmatrix} y_1(p) \\ \vdots \\ y_n(p) \end{pmatrix}$.

   (b) *En déduire que la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.*

Correction

Exercice 3

R 1 *On a* (C_1, C_2) *libre et* $C_2 = C_3 = \cdots = C_n$ *donc* $rg\,(A) = 2$.
On en déduit que $\lambda_0 = 0$ *est valeur propre et* $\dim(\mathrm{E}_0(A)) = \dim(\ker(A)) = n-2$ *par le théorème du rang.*
Soit f *canoniquement assoicée à* A. *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *la base canonique de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
On a pour $i \in [[3, n]]$, $f(e_2) = f(e_i)$ *donc* $v_i = e_2 - e_i \in \ker(f)$.
On a $mat_{(e_1,\ldots,e_n)}(v_3, \ldots, v_n) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 \\ -1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & -1 \end{pmatrix}$ *donc la famille* $(v_3, \ldots, v_n)$ *est échelonnée donc libre donc base de* $\ker(f) = E_0(A)$.

R 2 *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$.

$$(AX = \lambda X) \Leftrightarrow \begin{cases} (2\mathrm{i}\sqrt{n-1} - \lambda)x_1 + x_2 + \cdots x_n = 0 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 = \lambda x_n. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2\mathrm{i}\sqrt{n-1} - \lambda + \dfrac{n-1}{\lambda})x_1 = 0 \\ \forall i \in [[2, n-1]]\,,\ x = \lambda x_2 \end{cases}$$

• *Si* $AX = \lambda X$ *et* $2\mathrm{i}\sqrt{n-1} - \lambda + \dfrac{n-1}{\lambda} \neq 0$ *alors* $x_1 = 0$ *donc* $\forall i \in [[1, n]]\,,\ x_i = 0$ *donc* $X = 0$ *donc* λ *n'est pas valeur propre.*
• *Si* $2\mathrm{i}\sqrt{n-1} - \lambda + \dfrac{n-1}{\lambda} = 0$ *c'est-à-dire* $\lambda^2 - 2\mathrm{i}\sqrt{n-1}\lambda - (n-1) = 0$ *soit* $(\lambda - \mathrm{i}\sqrt{n-1})^2 = 0$, *on a donc* $\boxed{\lambda = \mathrm{i}\sqrt{n-1}}$.

En reprenant le système, $(AX = \lambda X) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \text{ quelconque} \\ x_1 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 = \lambda x_n. \end{cases}$ $\Leftrightarrow X = x_2 \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 v_1$ *avec* $v_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
On en déduit que $\mathrm{E}_{\mathrm{i}\sqrt{n-1}}(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$, *et* $\boxed{\dim\left(\mathrm{E}_{\mathrm{i}\sqrt{n-1}}(A)\right) = 1}$.
Par conséquent, $\sum_{\lambda \in sp(A)} \dim(\mathrm{E}_\lambda(A)) = n-1$ *donc* A ***n'est pas diagonalisable.***

R 3 • *Pour obtenir le résultat demandé, il suffit de trouver une base* $(v_1, \ldots, v_n)$ *de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ *dans laquelle la matrice de* f *soit égale à* T,
ce qui revient à la condition $f(v_2) = i\sqrt{n-1}v_2 + v_1$ *c'est-à-dire* $\left(f - i\sqrt{n-1}id\right)(v_2) = v_1$.
• *Si on remarque que* $A - i\sqrt{n-1}I_n$ *a pour première colonne* $\begin{pmatrix} i\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ *donc* $\left(f - i\sqrt{n-1}id\right)(e_1) = v_1$.
Si on pose $v_2 = e_1$. *On a donc* $\left(f - i\sqrt{n-1}id\right)(v_2) = v_1$ *donc* $(f)(v_2) = i\sqrt{n-1}v_2 + v_1$

• *Si on ne fait pas cette remarque, on résoud* $\left(A - i\sqrt{n-1}I_n\right)X = v_1$ *soit le système* $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \cdots x_n = \lambda \\ x_1 - \lambda x_2 = 1 \\ \vdots \\ x_1 - \lambda x_n = 1. \end{cases}$

et en prenant $x_1 = 1$*, on retombre sur la solution précédente.*
Si on montre que $(v_1, \ldots, v_n)$ ***est une base****, on aura bien* $\boxed{mat_{(v_1,\ldots,v_n)}(f) = T}$*, ce qui entraîne le résultat demandé.*

• *On a* $mat_{(e_1,\ldots,e_n)}(v_1, \ldots, v_n) = \begin{pmatrix} i\sqrt{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & -1 & & O \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P$ *qui est inversible car*

les transformations $C_1 \leftarrow C_1 + C_3 + \cdots + C_n$ *puis* $C_1 \leftrightarrow C_2$ *donnent une matrice triangulaire inversible) donc* ***la famille*** $(v_1, \ldots, v_n)$ ***est une base de*** $M_{n,1}(\mathbb{C})$.

Exercice 1:

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. On a $AX_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 4u_n + 4u_{n+1} - u_{n+2} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

2. On a $X_n = AX_{n-1} = A \times (AX_{n-2}) = A^2X_{n-2} = \cdots = A^nX_0$ (récurrence immédiate).

3. On obtient après calcul $\chi_A(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

4. On remarque que $\chi_A(-1) = 0$ et $\chi_A(x) = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2-4) = (x+1)(x-2)(x+2)$ donc $sp(A) = \{-1, 2, -2\}$
   A est une matrice de taille 3 et admet 3 valeurs propres distinctes donc est diagonalisble et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

5. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   $X \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow AX = -X \Leftrightarrow (A + I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2 = x_3$ donc

   $E_{-1}(A) = vect(U_1)$ avec $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   On obtient de même que $E_2(A) = vect(U_2)$ avec $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $E_{-2}(A) = vect(U_3)$ avec $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   D'après le cours, la famille (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

6. On a $u_0 = -8;\ u_1 = 0;\ u_2 = 5$ donc $X_0 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

   $X_0 = aU_1 + bU_2 + cU_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -8 \\ --a + 2b - 2c = 0 \\ a + 4b + 4c = 5 \end{cases}$.

   On obtient $a = -\frac{37}{3}, b = -\frac{11}{12}, c = \frac{21}{4}$.

7. On a $X_n = A^nX_0 = A^n \times \left(-\frac{37}{3}U_1 - \frac{11}{12}U_2 + \frac{21}{4}U_3\right) = -\frac{37}{3}A^nU_1 - \frac{11}{12}A^nU_2 + \frac{21}{4}A^nU_3$.
   Or $AU = \lambda U \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $A^nU = \lambda^nU$ donc $X_n = A^nX_0 = -\frac{37}{3}(-1)^nU_1 - \frac{11}{12}2^nU_2 + \frac{21}{4}(-2)^nU_3$.

8. En prenant la première composante de X_n, on obtient que $u_n = A^n X_0 = -\frac{37}{3}(-1)^n - \frac{11}{12}2^n + \frac{21}{4}(-2)^n$.

Exercice 2:

1. On a $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2 - 1$ et si $n \geq 1$,

$$P_{n+2}(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{n+2} \underset{/C_{n+2}}{=} x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{n+1} + \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & x & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

et $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & x & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{n+1} \underset{/L_{n+1}}{=} -P_n(x)$ donc $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x) : (R_n)$.

On a $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2 - 1$. En posant $P_0(x) = 1$, on a $P_2(x) = xP_1(x) - P_0(x)$, ce qui étend la relation (R_n) pour $n = 0$.

2. Pour $x \in]-2, 2[$, on pose $x = 2\cos(\alpha)$.avec $\alpha \in]0, \pi[$.
Posons $u_n = P_n(x)$. On a $u_{n+2} = 2\cos(\alpha)\, u_{n+1} - u_n$ qui définit une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique: $(ec) : r^2 - 2\cos(\alpha)\, r + 1 = 0$.
de discriminant $\Delta = -4\sin^2(\theta) = \left(2i\sin^2(\theta)\right)^2$ donc (ec) admet $1 \times e^{i\alpha}$ et $1 \times e^{-i\alpha}$ comme racines
On en déduit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A\cos(n\alpha) + B\sin(n\alpha).}$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2\cos(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = A \\ 2\cos(\alpha) = A\cos(\alpha) + B\sin(\alpha) \end{cases} \underset{\alpha \in]0,\pi[\text{ donc } \sin(\alpha) \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 = A \\ B = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \end{cases}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos(n\alpha) + \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\sin(n\alpha) = \dfrac{\cos(n\alpha)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

3. On a $\dfrac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)} = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [[1, n]],\ (n+1)\alpha = k\pi, \Leftrightarrow \exists k \in [[1, n]],\ \alpha = \dfrac{k\pi}{n+1}$
$\Leftrightarrow \exists k \in [[1, n]], x = 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$. La fonction cosinus est strictement décroissante sur $]0, \pi[$ donc les réels $x_k = 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ $k \in [[1, n]]$ sont n racines distinctes de P_n donc A_n admet n valeurs propres distinctes $x_1, \dots, x_n$ et $\forall k \in [[1, n]],\ x_k \in]-2, 2[$ car $\dfrac{k\pi}{n+1} \in]-\pi, \pi[$.

4. La matrice A_n admet n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
Dans la suite, on note $P_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale telles que $D_n = P_n^{-1} A_n P$.

5. Etude d'une suite récurrente:

   (a) On a $Y_{p+1} = P_n^{-1} X_{p+1} = P_n^{-1}\left(\frac{1}{2}A_n X_p\right) = \frac{1}{2}P_n^{-1}A_n P_n Y_p = \frac{1}{2}D_n Y_p$.
   On en déduit par récurrence immédiate que $\forall p \in \mathbb{N}\ Y_p = \left(\frac{1}{2}D_n\right)^p Y_0$.
   Si la matrice P_n est la matrice de passage de la base canonique vers $(U_1, \dots, U_n)$ avec U_i vecteur propre associé à x_i, on aura $\frac{1}{2}D_n = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{x_2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{x_n}{2} \end{pmatrix}$ donc $Y_p = \left(\frac{1}{2}D_n\right)^p Y_0 = \begin{pmatrix} \left(\frac{x_1}{2}\right)^p y_1(0) \\ \vdots \\ \left(\frac{x_n}{2}\right)^p y_p(0) \end{pmatrix}$. On

a $x_i \in]-2,2[$ donc $\dfrac{x_i}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\dfrac{x_i}{2}\right)^p y_p(i) = 0$ pour tout $i \in [[1,n]]$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} Y_p = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

(b) Or $X_p = P_n Y_p$ et, par continuité du produit matriciel, $\lim\limits_{p\to+\infty} P_n Y_p = P_n 0 = 0$ donc la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.