Corrigé de CCP 2013 Math2 PC

Partie I : calculs préliminaires

I-1.
I-1.1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour $t>0$, $f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t^2}$.
f est un quotient de fonctions continues sur $]0;+\infty[$ donc f est continue sur cet intervalle.
Par limite usuelle, $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=\dfrac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et par conséquent intégrable sur $]0;1]$.
Pour tout $t>0$, $-1\leq \cos(t)\leq 1$ donc $0\leq f(t)\leq \dfrac{2}{t^2}$. $2>1$ donc $t\mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ et, par comparaison, f est intégrable sur $[1;+\infty[$.
On peut alors conclure que f est intégrable sur $]0;+\infty[$.
I-1.2. Soit $A>0$.
$t\mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0;A]$ et est prolongeable par continuité en 0 donc $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin t}{t}dt$ existe.
I-1.3. Soit $A>0$ et $\varepsilon\in]0;A]$. On pose $I(\varepsilon,A)=\displaystyle\int_\varepsilon^A \frac{\sin t}{t}dt$.
On pose $u(t)=\dfrac{1}{t}$, $v'(t)=\sin t$ et $u'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$, $v(t)=1-\cos t$.
u et v donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\varepsilon;A]$ donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I(\varepsilon,A) &= \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\varepsilon^A+\int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt \\ &= \frac{1-\cos A}{A}-\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}+\int_\varepsilon^A\frac{1-\cos(t)}{t^2}dt \end{aligned}$$

Quand ε tend vers 0, $1-\cos\varepsilon\sim\dfrac{\varepsilon^2}{2}$ donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}=0$ et, en remarquant que K et $D(A)$ existent, on peut faire tendre ε vers 0 pour obtenir :

$$D(A)=\frac{1-\cos A}{A}+\int_0^A\frac{1-\cos t}{t^2}dt$$

Mais, $0\leq\dfrac{1-\cos A}{A}\leq\dfrac{2}{A}$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{1-\cos A}{A}=0$ et d'autre part,
$\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_0^A\frac{1-\cos t}{t}dt=K$ donc $D(A)$ a une limite réelle quand A tend vers l'infini et cette limite est égale à K.
I-2.
I-2.1. Soit f définie sur $\mathbb{R}^+\times]0;+\infty[$ par $f:(x,t)\mapsto\dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$.
– Pour tout $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (la fonction exponentielle est continue)
– Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0;+\infty[$ (produit de fonctions continues).
– Pour $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times]0;+\infty[$, $xt\geq 0$ donc $0\leq e^{-xt}\leq 1$ et $|f(x,t)|\leq\varphi(t)$ où $\varphi:t\mapsto\dfrac{1-\cos t}{t^2}$. On a vu à la question I-1.1. que φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0;+\infty[$.
En utilisant le théorème de continuité des intégrales à paramètre, on peut conclure que L est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
I-2.2. Soit $a>0$.
– Pour tout $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a;+\infty[$ (la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^2$) et pour $x\geq a$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\dfrac{1-\cos t}{t}e^{-xt}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=(1-\cos t)e^{-xt}$.

– Pour tout $x \geq a$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0;+\infty[$ (question précédente).
– Pour tout $x \geq a$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $]0;+\infty[$.
– Pour $x \geq a$ et $t > 0$, et $k = 1, 2$, $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_k(t)$ où $\varphi_k : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^{2-k}}e^{-at}$. φ_k est continue par morceaux sur $]0;+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et, pour $t > 0$, $\varphi_k(t) = \varphi(t)t^k e^{-at}$. $a > 0$ donc, par croissance comparée, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^k e^{-at} = 0$ et, en $+\infty$, $\varphi_k = o(\varphi)$. Comme φ est intégrable sur $]0;+\infty[$, par comparaison, φ_k l'est aussi.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre nous permet alors de conclure que L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a;+\infty[$.
Soit $x_0 > 0$. L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_0/2;+\infty[$ donc en x_0. Ceci étant vrai pour tout $x_0 > 0$, on en déduit que L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$.

I-2.3. $\varphi : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$. φ est prolongeable par continuité en 0 ; notons encore φ le prolonogement. $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$ donc il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t > A$, $|\varphi(t)| \leq 1$.
φ est continue sur le segment $[0;A]$ donc φ est bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \in [0;A]$, $|\varphi(t)| \leq M$. Si on pose $M' = \max(1, M)$ alors, pour tout $t \in [0;+\infty[$, $|\varphi(t)| \leq M'$. En particulier φ est bornée sur $]0;+\infty[$.
On montre de même que $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t}$ est bornée sur $]0;+\infty[$. On note M'' un majorant de cette fonction (qui est à valeurs positives).
Soit $x > 0$.
$xL'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} xe^{-xt}dt$. Pour $t > 0$, $0 \leq \dfrac{1-\cos t}{t}xe^{-xt} \leq M''xe^{-xt}$ et $x > 0$ donc $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$: $|xL'(x)| \leq M'' \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-xt}dt$ d'où l'on déduit $|xL'(x)| \leq M''$. Ceci prouve que la fonction $x \mapsto |xL'(x)|$ est majorée sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On procède de même pour $x \mapsto |xL(x)|$.
Pour $x > 0$, $|L'(x)| \leq \dfrac{M''}{x}$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} L'(x) = 0$.
On obtient de même $\lim\limits_{x \to +\infty} L(x) = 0$.

I-2.4. Pour $x > 0$, $L''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t)e^{-xt}dt$. Pour $A > 0$, par linéarité de l'intégrale sur un segment et en utilisant que e^{-xt} est réel,

$$\begin{aligned}\int_0^A (1-\cos t)e^{-xt}dt &= \int_0^A e^{-xt}dt - \mathrm{Re}\left(\int_0^A e^{(i-x)t}dt\right)\\ &= \frac{1-e^{-xA}}{x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{(i-x)A}}{i-x}\right)\end{aligned}$$

$\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-xA} = 0$ et $|e^{(i-x)A}| = e^{-xA}$ donc $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{(i-x)A} = 0$. En passant à la limite ($A \to +\infty$), on a : $L''(x) = \dfrac{1}{x} + \mathrm{Re}(\dfrac{1}{i-x})$.
Après simplification, pour $x > 0$, $L''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$.

I-2.5. Par intégration, il existe une constante c telle que, pour $x > 0$, $L'(x) = \ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$.
$L'(x) = c + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right) = 0$ et, d'après la question précédente, $c = 0$.
Ainsi, pour $x > 0$, $L'(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
Une primitive de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $x \mapsto x\ln x - x$.

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t^2+1)dt &= [t\ln(t^2+1)]_1^x - \int_1^x \frac{2t^2}{t^2+1}dt\\ &= x\ln(x^2+1) - \ln 2 - 2\int_1^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt\\ &= x\ln(x^2+1) - \ln 2 - 2(x-1) + 2\text{Arctan}(x) - 2\text{Arctan}(1)\end{aligned}$$

Il existe donc une constante c' telle que, pour tout $x>0$, $L(x) = x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \text{Arctan}(x) + c'$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$ et d'autre part, $x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) = -\frac{x}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2} = 1$ donc, en $+\infty$, $\ln\frac{x^2+1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1)) = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = 0$, on a finalement $c' = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x>0$, $L(x) = x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}$.

L est continue en 0 et $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty}\text{Arctan}(x) = 0$ donc $L(0) = \frac{\pi}{2}$.

Mais, par définition de L, $L(0) = K$ donc $K = \frac{\pi}{2}$.

I-3.

I-3.1. Soit $g \left|\begin{array}{ccc}]0;1[& \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{\ln u}{u-1}\end{array}\right.$.

g est continue sur $]0;1[$ (quotient de fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas).

En 0, $g(u) \sim -\ln u$ et $-\ln$ est intégrable sur $]0;\frac{1}{2}[$ donc g aussi.

En 1, $\ln(u) \sim u-1$ donc $\lim\limits_{u\to1} g(u) = 1$: g est prolongeable par continuité en 1 et donc intégrable sur $]\frac{1}{2};1[$.

Finalement g est intégrable sur $]0;1[$.

I-3.2. Soit $k\in\mathbb{N}$. $u\mapsto u^k\ln u$ est continue sur $]0;1]$ (produit de fonctions continues).

Soit $\varepsilon>0$. Par intégration par parties,

$$\int_\varepsilon^1 u^k\ln(u)du = \left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\ln(u)\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 u^k du$$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon = 0$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 u^k du = \frac{1}{k+1}$ donc $\int_0^1 u^k\ln(u)du$ existe et vaut $\frac{1}{k+1}$.

I-3.3. En utilisant la série géométrique, pour $u\in]0;1[$, $\frac{\ln(u)}{u-1} = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u^k\ln(u)$.

Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $g_k : u\mapsto -u^k\ln(u)$.

- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, g_k est continue par morceaux et intégrable sur $]0;1[$ (question précédente).
- La série de fonctions $\sum g_k$ converge simplement sur $]0;1[$ et sa somme, $S : u\mapsto\frac{\ln u}{u-1}$ est continue par morceaux sur $]0;1[$.
- Pour $k\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 |g_k(u)|du = -\int_0^1 u^k\ln(u)du = \frac{1}{(k+1)^2}$. Par comparaison aux séries de Riemann, $\sum\limits_{k\geq0}\int_0^1 |g_k(u)|du$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque permet alors d'affirmer que S est intégrable sur $]0;1[$ (déjà démontré) et que $\int_0^1 S(u)du = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 g_k(u)du$ et donc

$$\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}du = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}$$

Partie II : étude de quelques suites d'intégrales

II-1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I. On suppose :

- La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I.
- Il existe une fonction φ continue par morceaux, intégrable et à valeurs positives sur I telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I, f est intégrable sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

II-2.

II-2.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : t \mapsto f(t^n)$.

$t \mapsto t^n$ est continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et f est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc, par composition u_n est continue sur $[0;1]$; a fortiori, elle y est continue par morceaux.

Si $t \in [0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$ et f est continue en 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t) = f(0)$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1) = f(1)$.

(u_n) converge donc simplement sur $[0;1]$ vers la fonction u égale à $f(0)$ sur $[0;1[$ et à $f(1)$ en 1 ; u est continue par morceaux sur $[0;1]$.

f est continue sur le segment $[0;1]$ donc bornée : il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [0;1]$, $|f(x)| \leq M$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0;1]$, $|u_n(t)| \leq M$ où $t \mapsto M$ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0;1]$.

D'après le théorème de convergence dominée, (I_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(0)du$:

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = f(0)$$

II-2.2. Pour $n > 0$, on effectue le changement de variable $u = t^n$ dans I_n ($t \mapsto t^n$ est $\mathcal{C}^1$ de $]0;1]$ dans lui même et sa dérivée ne s'annule pas). On obtient $nI_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u} u^{1/n} du$.

On pose $g_n : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u} u^{1/n}$.

Pour tout n, g_n est continue par morceaux sur $]0;1]$.

(g_n) converge simplement sur $]0;1]$ vers $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $u \in]0;1]$, $|g_n(u)| \leq \dfrac{|f(u)|}{u}$ où, par hypothèse, $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0;1]$.

Le théorème de convergence dominée nous dit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$.

II-2.3. En utilisant ce qui précède avec la fonction sin (sin est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est intégrable sur $]0;1]$), on obtient

$$\int_0^1 \sin(t^n)dt \sim \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\sin u}{u} du$$

(on remarque que $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est continue positive, non identiquement nulle sur $]0;1]$ et donc son intégrale n'est pas nulle)

II-3.

II-3.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto f(t^n)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc intégrable sur tout segment.

Soit $x > 1$. Dans $\displaystyle\int_1^x f(t^n)dt$, on effectue comme ci-dessus le changement de variable $u = t^n$:

$$\int_1^x f(t^n)dt = \frac{1}{n} \int_1^{x^n} \frac{f(u)}{u} u^{1/n} du$$

Pour $u > 1$, comme $\dfrac{1}{n} \leq 1$, $\left|\dfrac{f(u)}{u}u^{1/n}\right| \leq |f(u)|$ et f est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}u^{1/n}$ aussi. L'intégrale ci-dessus a donc une limite finie quand x tend vers $+\infty$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$) ce qui justifie l'existence de A_n.

II-3.2. Une application du théorème de convergence dominée analogue aux précédentes donne $\lim\limits_{n\to+\infty} nA_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u}du$.

II-4.

II-4.1. Le changement de variable $u = t^n$ donne $C_n(A) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{A^n} \sin(u)u^{1/n-1}du$. On effectue une intégration par partie en posant $\varphi'(u) = \sin u$, $\psi(u) = u^{1/n-1}$, $\varphi(u) = 1 - \cos u$, $\psi'(u) = \left(\dfrac{1}{n} - 1\right)u^{1/n-2}$ (φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[1; A^n]$) :

$$C_n(A) = \frac{1-\cos(A^n)}{nA^{n-1}} - \frac{1-\cos(1)}{n} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2}u^{1/n}du$$

II-4.2. $0 \leq \dfrac{1-\cos(A^n)}{A^{n-1}} \leq \dfrac{2}{A^{n-1}}$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1-\cos(A^n)}{A^{n-1}} = 0$.

Pour $u \geq 1$, $0 \leq \dfrac{1-\cos u}{u^2}u^{1/n} \leq \dfrac{2}{u^{2-1/n}}$. Quand $n \geq 2$, $2 - \dfrac{1}{n} > 1$ donc $u \mapsto \dfrac{1-\cos u}{u^2}u^{1/n}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ ce qui démontre que $\displaystyle\int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2}u^{1/n}du$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$.

On en déduit que $C_n(A)$ a une limite finie quand n tend vers l'infini.

II-4.3. En faisant tendre A vers l'infini dans la question précédente, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \sin(t^n)dt = -\frac{1-\cos(1)}{n} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}u^{1/n}du$$

Une nouvelle application du théorème de convergence dominée (en remarquant que, pour $u \geq 1$ et $n \geq 2$, $0 \leq \dfrac{1-\cos u}{u^2}u^{1/n} \leq \dfrac{2}{u^{3/2}}$) donne $\lim\limits_{n\to+\infty} n\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^n)dt = 1 - \cos(1) + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}dt$.

(on aurait pu aussi utiliser la question II-3 avec $f : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ en refaisant le changement de variable $u = t^n$).

II-4.3. Avec la relation de Chasles et les résultats qui précèdent, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt + 1 - \cos(1) + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}dt$. Il reste alors à faire une intégration par parties dans la première intégrale pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} \sin(t^n)dt = K = \frac{\pi}{2}$$

Partie III : étude de séries de fonctions

III-1.

III-1.1. Si $x \in]-1;1[$, la série géométrique $\sum x^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc $F(x)$ existe et vaut $\dfrac{1}{1-x} - 1$:

$$\forall x \in]-1;1[,\ F(x) = \frac{x}{1-x}$$

F est alors dérivable sur $]-1;1[$ en tant que quotient de fonctions dérivables :

$$\forall x \in]-1;1[,\ F'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

III-1.2. On en déduit

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} (1-x)F(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)F'(x) = +\infty- \qquad \lim_{x\to 1^-} (1-x)^2F'(x) = 1$$

III-2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

III-2.1. Soit $a \in]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-a;a]$, $\left|\dfrac{x^n}{1-x^n}\right| = \dfrac{|x|^n}{1-x^n}$. D'une part, $|x^n| \leq a^n$ et $|1-x^n| \geq 1-|x|^n$ (seconde inégalité triangulaire) donc $1-x^n \geq 1-a^n > 0$; ainsi

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [-a;a], \quad \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leq \frac{a^n}{1-a^n}$$

$a \in]0;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-a^n) = 1$ et $\dfrac{a^n}{1-a^n} \sim a^n$. a^n est le terme général d'une série géométrique convergente donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\dfrac{a^n}{1-a^n}$ aussi.

On peut en déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a;a]$.

Si on considère un segment $[b;c]$ quelconque inclus dans $]-1;1[$, en posant $a = \max(|b|,|c|)$, $[b;c] \subset [-a;a]$ donc $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1;1[$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une fonction continue sur $]-1;1[$ donc, par transfert de continuité, F est une définie et continue sur $]-1;1[$.

III-2.2. Soit $x \in]0;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, $\dfrac{1-x^n}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

Pour k entre 0 et $n-1$, $x^k \leq 1$ donc $\dfrac{1-x^n}{1-x} \leq n$.

III-3.

III-3.1. $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ et intégrable sur $]0;1[$ et $t \mapsto x^t = e^{t\ln x}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ bijective de $]0;+\infty[$ dans $]0;1[$ (de dérivée $t \mapsto (\ln x)x^t$) à valeurs strictement négatives) donc $t \mapsto \dfrac{f(x^t)}{x^t}(\ln x)x^t$ est intégrable sur $]0;+\infty[$ c'est-à-dire $t \mapsto f(x^t)\ln x$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et il y a égalité des intégrales. Ceci prouve l'existence de $G(x)$ et l'égalité :

$$G(x) = -\frac{1}{\ln x}\int_0^1 \frac{f(u)}{u}du$$

III-3.2. $x \in]0;1[$ donc $t \mapsto x^t$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $[0;1[$ et f est croissante sur $[0;1[$ donc $t \mapsto f(x^t)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $t \in [n;n+1]$, $f(x^t) \leq f(x^n)$; en intégrant sur $[n;n+1]$, on obtient $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x^t)dt \leq f(x^n)$.

De même si $t \in [n-1;n]$ ($n \in \mathbb{N}^*$ donc $n-1 \geq 0$), $f(x^t) \geq f(x^n)$ et $f(x^n) \leq \displaystyle\int_{n-1}^n f(x^t)dt$.

On a donc l'encadrement :

$$\int_n^{n+1} f(x^t)dt \leq f(x^n) \leq \int_{n-1}^n f(x^t)dt$$

III-3.3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On somme l'encadrement précédent pour n variant de 1 à N. Grâce à la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_1^{N+1} f(x^t)dt \leq \sum_{n=1}^N f(x^t) \leq \int_0^N f(x^t)dt$$

D'après l'existence de $G(x)$ et la positivité de f (f est croissante et $f(0)=0$)),

$\displaystyle\int_0^N f(x^t)dt \leq \int_0^{+\infty} f(x^t)dt$ et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^N f(x^t) \leq \int_0^{+\infty} f(x^t)dt$: La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum f(x^n)$ est donc majorée ; on en déduit qu'elle converge. Ceci démontre l'existence de $F(x)$.

En passant à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient alors

$$\int_1^{+\infty} f(x^t)dt \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} f(x^t)dt$$

III-3.4. $1 - x > 0$ donc

$$(1-x)\int_1^{+\infty} f(x^t)dt \leq (1-x)F(x) \leq (1-x)\int_0^{+\infty} f(x^t)dt$$

D'une part, $(1-x)\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x^t)dt = (1-x)G(x) = -\frac{1-x}{\ln x}\int_0^1 \frac{f(u)}{u}du.$

Par limite usuelle, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-x)\int_0^{+\infty} f(x^t)dt = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}du.$

D'autre part, comme dans la question III-3.1., le changement de variable $u = x^t$ donne $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x^t)dt = -\frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{f(u)}{u}du$. On sait que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0;1[$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{f(u)}{u}du = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}du$. De plus $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{\ln x} = -1$ donc, par produit, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-x)\int_1^{+\infty} f(x^t)dt = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}du.$

On peut alors conclure avec le théorème d'encadrement que

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}du$$

III-4.

III-4.1. Pour $x \in]-1;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = -\ln(1-x^n)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$ et, pour $x \in]-1;1[$, $u_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{1-x^n}$.
- Soit $x \in]-1;1[$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc, quand n tend vers $+\infty$, $|u_n(x)| \sim |x|^n$. La série géométrique $\sum |x|^n$ converge donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument. On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1;1[$.
- Soit $a \in]0;1[$. Comme à la question III-2.1., on démontre que, pour $x \in [-a;a]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n'(x)| \leq \dfrac{na^{n-1}}{1-a^n}$. a^n tend vers 0 donc $\dfrac{na^{n-1}}{1-a^n} \sim na^{n-1}$. Si on pose $\alpha_n = na^{n-1}$, $\alpha_n > 0$ et $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \dfrac{(n+1)a}{n}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = a < 1$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum \alpha_n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{na^{n-1}}{1-a^n}$ converge. Ceci prouve la convergence normale de $\sum u_n'$ sur $[-a;a]$ et donc (comme en III-2.1.) sur tout compact de $]-1;1[$.

D'après le théorème de transfert de dérivabilité, on peut alors conclure que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$ et

$$\forall x \in]-1;1[,\ F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}$$

III-4.2. Soit $f : u \mapsto -\ln(1-u)$. f est continue et croissante sur $[0;1[$, $f(0) = 0$.

Quand u tend vers 0, $\dfrac{f(u)}{u}$ tend vers 1 et $\dfrac{f(u)}{u} \sim -\ln(1-u)$ donc $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]\frac{1}{2};1[$ (car ln l'est sur $]0;\frac{1}{2}[$). Par conséquent $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0;1[$.

On peut alors utiliser la question III-3.4. : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{-\ln(1-v)}{v}dv$. Le changement de variables $u = 1-v$ donne :

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du$$

III-4.3. Soit $x \in]0;1[$ et φ la fonction définie par $\varphi(t) = \dfrac{tx^t}{1-x^t}$. φ est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et, pour $t \geq 0$, $\varphi'(t) = \dfrac{x^t(1 + t\ln x - e^{t\ln x})}{(1-x^t)^2}$.

Pour tout réel u, $e^u \geq 1 + u$ (par convexité de la fonction exponentielle) donc φ est une fonction décroissante et à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$.

$x \in]0;1[$ donc x^t converge vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et $t^2\varphi(t) \sim t^3 e^{t\ln x}$. $\ln x < 0$ donc $\varphi(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

$2 > 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ et, par comparaison φ aussi. Etant continue sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Par comparaison série-intégrale comme en III-3., on obtient alors l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tx^t}{1-x^t}dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \leq \int_0^{+\infty} \frac{tx^t}{1-x^t}dt$$

Dans chacune de ces deux intégrales, on effectue le changement de variable $u = x^t$:

$$\frac{1}{(\ln x)^2}\int_0^x \frac{\ln u}{u-1}du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \leq \frac{1}{(\ln x)^2}\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}du$$

$(1-x)^2 > 0$ donc

$$\frac{(1-x)^2}{(\ln x)^2}\int_0^x \frac{\ln u}{u-1}du \leq (1-x)^2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \leq \frac{(1-x)^2}{(\ln x)^2}\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}du$$

On démontre alors par encadrement comme dans la question III-3.4. que

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}du$$

Comme, pour $x \in]0;1[$, $F'(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$, on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (1-x)^2F'(x) = \int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}du$.

Finalement, grâce à la fin de la partie I,

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^2F'(x) = \frac{\pi^2}{6}$$