E3A PSI 1 2017

e3a 2017 - PSI 1
durée 4 heures - calculatrices interdites

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B} = \left(1, X, \ldots, X^{n-1}\right)$ sa base canonique.

Soient $a_1, \ldots, a_n$, n réels vérifiant : $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

1. Montrer que l'application : $T : P \mapsto \left(P\left(a_1\right), \ldots, P\left(a_n\right)\right)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.

2. On note $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $L_i = T^{-1}\left(e_i\right)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par T est e_i. Montrer que $\mathcal{B}' = (L_1, \ldots, L_n)$ est une base de E puis déterminer les composantes d'un polynôme P quelconque de E dans cette base.

Dans la suite de l'exercice, on note $M = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$

3. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

3.1 Donner, sans justification, les polynômes L_1, L_2, L_3 et expliciter la matrice M.

3.2 Montrer que 1 est valeur propre de la matrice M et déterminer le sous-espace propre associé.

3.3 En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.

4. **On revient au cas général**.

4.1 Montrer que M est inversible. Calculer son inverse. (On pourra utiliser la question 2.)

4.2 Etablir la relation : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.

4.3 Montrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1$. Montrer ensuite que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0$.

4.4 Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de M.

5. Dans cette question, on suppose que $n \geqslant 4$ et soit u l'endomorphisme de E défini par : [1]

$$\forall P \in E, u(P) = Q \qquad \text{avec} \quad Q(X) = P(0)L_1(X) + P(1)L_2(X) + P(2)L_3(X)$$

5.1 Déterminer $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$. Sont-ils supplémentaires ?

5.2 Déterminer les éléments propres de u et caractériser géométriquement u

1. Imprécision de l'énoncé original : il faut prendre ici $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 2$

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $[0,+\infty[$ et $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des applications continues de I vers $\mathbb{R}$.
On note E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des éléments f de $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ tels que f^2 est intégrable sur I, c'est-à-dire tels que $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ converge.

Questions de cours

1. Prouver que pour tous réels a et b, $ab \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une application intégrable sur I.

3. Soit φ l'application qui au couple $(f,g) \in E^2$ associe le réel : $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t) \, \mathrm{d}t$.
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle \mid \rangle$.

Partie 1

Soit h élément de $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t) \, \mathrm{d}t$ converge.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_n^{n+1} h(t) \, \mathrm{d}t$.
Prouver que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$.

2. En déduire l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h(a_n) = 0$.

Partie 2

Soit F l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ convergent. Soit $f \in F$.

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t) \, \mathrm{d}t$ convergent.

2. Etablir l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t) \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$.
On pourra, par exemple, utiliser un résultat de la partie 1.

3. Démontrer
$$\left(\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^{+\infty} t^2 [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 \, \mathrm{d}t\right) \qquad (*)$$

4. Déterminer toutes les applications $f \in F$ pour lesquelles il y a égalité dans l'inégalité $(*)$.

EXERCICE 3

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles est noté Ω.
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\llbracket 0, k \rrbracket$.
On considère alors une suite $(X_i)_{i \in \llbracket 0,k \rrbracket}$ de variables aléatoires de même loi et toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. [2]
On suppose que les variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots, X_k$ et T sont mutuellement indépendantes.

On définit la variable aléatoire Y par : $\quad \forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \displaystyle\sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$

1. Montrer que l'existence de l'espérance des variables aléatoires X_i entraine l'existence de l'espérance de Y.
On pourra constater que $([T = j])_{j \in \llbracket 0,k \rrbracket}$ constitue un système complet d'événements.

2. Calculer alors $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_0)$ et $\mathbb{E}(T)$.

3. On suppose que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ et que X_0^2 possède une espérance.
Prouver alors que : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0)\,\mathbb{E}(T)$. [3]

---

2. A prendre dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{N} \cup \{-1, -2\}$ par exemple pour éviter les argumentations de familles sommables HP en PSI
3. Erreur de l'énoncé original : il faut montrer $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0)(\mathbb{E}(T) + 1)$

EXERCICE 4

PARTIE A. Recherche de zéro d'une fonction

1. Soient a et b deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$.

1.1 Justifier que f s'annule sur $[a, b]$.

1.2 Écrire une fonction Python `rech_dicho` prenant en arguments une fonction `f`, deux flottants `a` et `b` tels que `f(a)f(b)<0` et une précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un zéro de `f` à une précision `eps` près.

2. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

2.1 Montrer que f admet un point fixe (c'est-à-dire un réel c de $[0, 1]$ tel que $f(c) = c$).

2.2 Écrire une fonction Python `rech_pt_fixe` qui prend en argument une fonction `f` que l'on suppose continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, un précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un point fixe de `f` à une précision `eps` près. On pourra utiliser la fonction `rech_dicho`.

PARTIE B. Recherche dans une liste

1. On propose l'algorithme suivant

```
1  def rech_dicho(L,g,d,x):
2    """L est une liste telle que
        L[g:d+1] est triee"""
3    if x>L[d] :
4      return d+1
5    else :
6      a=g
7      b = d
8      while a != b :
9        c = (a+b)//2
10       if x <= L[c] :
11         b = c
12       else :
13         a = c+1
14   return a
```

1.1 On prend `L = [2,4,5,7,7,9,10]`. Que renvoient les instructions suivantes ?
`>>> rech_dicho(L,1,5,6)`
`>>> rech_dicho(L,0,5,1)`
On donnera les valeurs prises par les variables `a` et `b` à chaque passage ligne 9.

1.2 Détailler clairement ce que fait le programme `rech_dicho`.

1.3 Déterminer, en le justifiant, la complexité du programme, mesurée en nombre de comparaisons. On utilisera, si besoin est, la notation O, et on pourra exprimer cette complexité en fonction d'un ou plusieurs paramètres parmi `len(L)`, `g`, `d`, `x`.

2. Proposer un algorithme `tri_dicho` de tri par insertion **utilisant la fonction** `rech_dicho` pour trouver la position à laquelle insérer l'élément.

3. Estimer le nombre **d'affectations** de `tri_dicho` ainsi que le nombre de **comparaisons** effectuées par l'algorithme `tri_dicho` . Comparer avec le tri par insertion classique.

CORRECTION

EXERCICE 1

$E=\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\mathcal{B}=\left(1, X, \ldots, X^{n-1}\right)$ sa base canonique, $a_1, \ldots, a_n$, n réels vérifiant : $a_1<a_2<\cdots<a_n$.

1. Soit l'application : $T: P \mapsto\left(P\left(a_1\right), \ldots, P\left(a_n\right)\right)$.

- Linéarité. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, les applications $E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(\alpha)$ sont des formes linéaires. Ainsi T est une application linéaire de E vers $\mathbb{R}^n$.
- Injectivité. Soit $P \in \operatorname{ker}(T)$. On a $T(P)=0$ donc $\left(P\left(a_1\right), \ldots, P\left(a_n\right)\right)=(0,0, \ldots, 0)$ et donc P s'annule en au moins n réels distincts : les a_k. Ainsi P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ s'annule en au moins n points distincts, donc c'est le polynôme nul. On en déduit donc que $\operatorname{ker}(T) \subset\left\{0_E\right\}$.
  Par ailleurs, $\operatorname{ker}(T)$ est un sous-espace vectoriel de E donc on a l'inclusion réciproque. Donc $\operatorname{ker}(T)=\left\{0_E\right\}$ donc par caractérisation de l'injectivité des applications linéaires, T **est injective**.
- Bijectivité. On a $\operatorname{dim}(E)=n=\operatorname{dim}\left(\mathbb{R}^n\right)$. Donc comme T est une application injective de E vers $\mathbb{R}^n$, on a par caractérisation des isomorphismes en dimension finie,
  $\boxed{T \textbf{ est un isomorphisme de } E \textbf{ vers } \mathbb{R}^n}$

2. $\mathcal{E}=\left(e_1, \ldots, e_n\right)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $L_i=T^{-1}\left(e_i\right)$ et $\mathcal{B}^{\prime}=\left(L_1, \ldots, L_n\right)$. T est un isomorphisme de E vers $\mathbb{R}^n$ donc sa bijection réciproque, T^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers E. Or $\mathcal{B}^{\prime}$ est l'image de $\mathcal{E}$ par T^{-1}. Comme l'image par un isomorphisme d'une base de l'espace de départ est une base de l'espace d'arrivée , on en déduit que $\boxed{\mathcal{B}^{\prime}=\left(L_1, \ldots, L_n\right) \textbf{ est une base de } E}$.

Soit $P \in E$ et $\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}^{\prime}$. On a $P=\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k L_k$. On évalue cette relation en a_j, sachant que comme $L_i=T^{-1}\left(a_j\right)=1$ si $i=j$ et 0 si $i \neq j$. On obtient alors $P\left(a_j\right)=\lambda_j$ ce qui donne la coordonnée selon L_k de P dans la base $\mathcal{B}^{\prime}$. Ainsi $\boxed{P=\displaystyle\sum_{k=1}^n P\left(a_k\right) L_k}$.

On note $M=\left(m_{i, j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}^{\prime}$

3. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $n=3$, $a_1=0$, $a_2=1$ et $a_3=2$.

3.1 Comme les L_k sont de degré $\leqslant n-1$, s'annulent en les a_j pour $j \neq k$ et valent 1 ena_k, on trouve :

$$\boxed{L_1=\frac{(X-1)(X-2)}{2}=1-\frac{3}{2} X+\frac{1}{2} X^2, \; L_2=-X(2-X)=0+2 X-X^2 \textbf{ et } L_3=\frac{X(X-1)}{2}=0-\frac{1}{2} X+\frac{1}{2} X^2}$$

.

On en déduit la matrice de $\left(L_1, L_2, L_3\right)$ dans $\left(1, X, X^2\right)$: $\boxed{M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}}$

3.2 $M-I_3=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$ qui est de rang 2 (une ligne nulle donc matrice non inversible et deux premières colonnes non colinéaires donc rang supérieur ou égal à 2). Ainsi $\boxed{1 \textbf{ est une valeur propre de } M}$. De plus on remarque que dans cette matrice $M-I_3$, la somme des deux premières colonnes donne la troisième, ce qui signifie que $\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ -1\end{pmatrix}$ est dans le noyau de $M-I_3$ donc il est dans le sous-espace propre $E_1(M)$ de M relatif à la valeur propre 1. Or, comme le rang de $M - I_3$ vaut 2, la dimension de $E_1(M)$ vaut 1. Donc $\boxed{E_1(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$

3.3 Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On l'écrit sous la forme $P = a + bX + cX^2$. Comme M est la matrice de T^{-1} dans les bases $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ et B de $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$P = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 \iff T(P) = (a, b, c) \iff P = T^{-1}(a, b, c) \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Ainsi $P = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \ker(M - I_3) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$ sont les polynômes : $\boxed{\lambda\left(1 + X - X^2\right) \textbf{ lorsque } \lambda \textbf{ décrit } \mathbb{R}}$

4. On revient au cas général.

4.1 $\boxed{M \textbf{ est la matrice de passage d'une base vers une autre donc } M \textbf{ est inversible}}$.
M^{-1} est la matrice de T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$. Or :

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, T(X) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, T\left(X^2\right) = \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_n^2 \end{pmatrix}, \ldots, T\left(X^{n-1}\right) = \begin{pmatrix} a_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} \\ \vdots \\ a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$ Ainsi on obtient

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}}$$

4.2 On utilise l'expression obtenue à la question 2. avec le polynôme constant égal à 1. On obtient $1 = \sum_{i=1}^{n} 1\,(a_i)\,L_i$ donc $\boxed{\sum_{i=1}^{n} L_i = 1}$.

4.3 Par définition de M, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} X^{i-1}$. Ainsi :

$$1 = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\right) X^{i-1}.$$

En particulier, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la somme $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$ représente le coefficient en X^{i-1} du polynôme $\sum_{j=1}^{n} L_j = 1$. Donc $\boxed{\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1 \textbf{ et, si } i \in [\![2, n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0}$.

Remarque : On pouvait aussi constater que ces sommes $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$ correspondaient aux coefficients de la première colonne de la matrice produit de M par M^{-1} car la première colonne de M^{-1} n'est constituée que de 1.

4.4 On reprend l'expression $L_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} X^{i-1}$. On a alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = L_j(1) =$

$L_j(a_1)$ ici car $a_1 = 1$. Ainsi $\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_{i,1} = 1 \text{ et, si } j \in [\![2,n]\!], \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 0}$.

Remarque On pouvait aussi constater que ces sommes $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}$ correspondaient aux coefficients de la première ligne de la matrice produit de M^{-1} par M car la première ligne de M^{-1} n'est constituée que de 1 car $a_1 = 1$.

5. $n \geqslant 4$, $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2$ et u l'endomorphisme de E défini par : $u(P) = P(0)L_1 + P(1)L_2 + P(2)L_3$

5.1 ✏ Noyau. Soit $P \in E$. $P \in \ker(u) \iff P(0) = P(1) = P(2) = 0$ car (L_1, L_2, L_3) est libre. Ainsi $\boxed{\ker(u) = \left\{X(X-1)(X-2)Q \middle| Q \in \mathbb{R}_{n-4}[X]\right\}}$

✏ Image. D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension $\dim(E) - \dim(\ker(u)) = 3$. Or on a clairement $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{vect}(L_1, L_2, L_3)$ qui est de dimension 3 car (L_1, L_2, L_3) est libre. Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(L_1, L_2, L_3)}$

✏ Supplémentaires. Soit $P \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aL_1 + bL_2 + cL_3$. En évaluant en $0, 1$ et 2, on trouve respectivement $a = 0, b = 0, c = 0$. Donc $P = 0_E$: $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont en somme directe. Mais comme la somme de leurs dimensions est $\dim(E)$ par le théorème du rang, on en déduit que $\boxed{\mathrm{Im}(u) \text{ et } \ker(u) \text{ sont supplémentaires dans } E}$

5.2 On sait déjà que 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité $n-3$ car $\ker(u)$ est de dimension $n-3$. Par ailleurs on vérifie aisément que $u(L_1) = L_1$, $u(L_2) = L_2$ et $u(L_3) = L_3$. ainsi, comme (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathrm{Im}(u)$, on en déduit que u induit sur $\mathrm{Im}(u)$ l'endomorphisme identique de $\mathrm{Im}(u)$: 1 est une valeur propre de u et l'espace propre associé est $\mathrm{Im}(u)$.
Ainsi u est diagonalisable (car la somme des dimensions des sous-espaces propres est n la dimension de E) et ses valeurs propres sont 0 et 1.
Donc $\boxed{u \text{ est le projecteur d'axe } \mathrm{Im}(u) \text{ parallèlement à } \ker(u)}$ Déterminer les éléments propres de u et caractériser géométriquement u

EXERCICE 2

$I=[0,+\infty[$. E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des éléments f de $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ tels que f^2 est intégrable sur I.

Questions de cours

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a $(a-b)^2\geqslant 0$ i.e. $a^2+b^2\geqslant 2ab$ Ainsi $\boxed{\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, ab\leqslant\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)}$.

2. Soit $(f,g)\in E^2$. D'après l'inégalité précédente, qui est également vrai en changeant a et $-a$, on a $\left|fg\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(f^2+g^2\right)$. Or f et g sont dans E donc elles sont continues et leurs carrés f^2 et g^2 sont intégrables sur I. Ainsi par majoration, comme $\left|fg\right|$ est continue positive et majorée par $\frac{1}{2}\left(f^2+g^2\right)$ qui est continue positive intégrable sur I, $\left|fg\right|$ est intégrable sur I donc fg est intégrable sur I. Ainsi $\boxed{\textbf{le produit de deux éléments de } E \textbf{ est intégrable sur } I}$

3.
- ✏ Existence. φ est bien définie sur E et à valeurs dnas $\mathbb{R}$ car si $(f,g)\in E^2$, fg est intégrable sur I.
- ✏ Symétrie. Par commutativité du produit de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, φ **est symétrique**.
- ✏ Bilinéarité. Soit $(f,g,h)\in E^3$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $\varphi(af+bh,g)=\int_I(af+bh)g=a\int_I fg+b\int_I hg$ par linéarité de l'intégration. Ainsi $\varphi(af+bh,g)=a\varphi(f,g)+b\varphi(h,g)$: φ est linéaire à gauche. Par symétrie, on en déduit que φ **est bilinéaire**.
- ✏ Positivité. Soit $f\in E$. f^2 est une fonction continue positive intégrable sur I donc par positivité de l'intégration, $\int_I f^2\geqslant 0$ i.e. $\varphi(f,f)\geqslant 0$: φ **est positive**.
- ✏ Définie positivité. Soit $f\in E$ telle que $\varphi(f,f)=0$. f^2 est une fonction continue positive intégrable sur I et son intégrale sur I est nulle, donc f^2 est la fonction nulle sur I et donc f est la fonction nulle sur I. Comme on a déjà vérifié que φ était positive, on en déduit que φ **est définie positive**

Ainsi $\boxed{\varphi \textbf{ définie bien un produit scalaire sur } E}$

Partie 1

Soit h élément de $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. On note H la primitive de h s'annulant en 0. Comme $\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t$ converge, H possède une limite finie en $+infty$ et cette limite vaut $\ell=\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t$. Mais alors $H(n)$ et $H(n+1)$ tendent vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi leur différence, $H(n+1)-H(n)=J_n$ tend vers $\ell-\ell=0$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi $\boxed{\lim_{n\to+\infty}J_n=0}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. la restriction de $\left|h\right|$ à $[n,n+1]$ est continue sur ce segment donc est minorée et atteint son minimum. On considère $a_n\in[n,n+1]$ tel que $\left|h\left(a_n\right)\right|=\min_{t\in[n,n+1]}\left|h-t)\right|$.

Si $h\left(a_n\right)=0$, on a évidemment $0\leqslant\left|h\left(a_n\right)\right|\leqslant\left|J_n\right|$.

Si $h\left(a_n\right)>0$. Alors comme h est continue sur le segment $[n,n+1]$, h ne s'annulant pas sur $[n,n+1]$, h est de signe constant sur $[n,n+1]$. Donc $\left|J_n\right|=\int_n^{n+1}\left|h(t)\right|\mathrm{d}t\geqslant\left|h\left(a_n\right)\right|$.

Dans tous les cas $0\leqslant\left|h\left(a_n\right)\right|\leqslant\left|J_n\right|$. Ainsi par le théorème des gendarmes, on en déduit que $h\left(a_n\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Mais comme $n\leqslant a_n$, a_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi $\boxed{\textbf{on a bien trouvé une suite } \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\in I^{\mathbb{N}} \textbf{ telle que : } \lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty \textbf{ et } \lim_{n\to+\infty}h\left(a_n\right)=0}$.

Partie 2

F ensemble des applications $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,[f(t)]^2\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2\ \mathrm{d}t$ convergent. Soit $f \in F$.

1. ✏ f^2 est une fonction continue sur I. De plus $\forall t \in [1,+\infty[, \left|f^2(t)\right| \leqslant t^2 f^2(t)$ et la fonction $t \in [1,+\infty[\mapsto t^2 f^2(t)$ est continue intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc par majoration, f^2 est intégrable sur $[1,+\infty[$. Or f^2 est continue sur le segment $[0,1]$ donc intégrable sur ce segment.

Ainsi $\boxed{\textbf{$f^2$ est intégrable sur I i.e. } \displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\ \mathrm{d}t \textbf{ converge}}$.

✏ On pose g_1 et g_2 les fonctions $t \in I \mapsto tf(t)$ et $t \in I \mapsto f'(t)$. g_1 et g_2 sont continues sur I et de carré intégrable sur I, i.e. g_1 et g_2 sont dans E. Ainsi d'après la question de cours 2.,

$\boxed{\textbf{le produit g_1g_2 est intégrable sur I i.e. } \displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\ \mathrm{d}t \textbf{ converge}}$

.

2. On pose h la fonction définie sur I par $h(t) = t^2 f^2(t)$. h est continue et intégrable sur $I = \mathbb{R}^+$. On choisit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h(a_n) = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on intègre par parties $\displaystyle\int_0^{a_n} tf'(t)f(t)\ \mathrm{d}t$. On obtient : $\displaystyle\int_0^{a_n} tf'(t)f(t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{tf^2(t)}{2}\right]_0^{a_n} - \frac{1}{2}\int_0^{a_n} f^2(t)\ \mathrm{d}t = \frac{h(a_n)}{2a_n} - \frac{1}{2}\int_0^{a_n} f^2(t)\ \mathrm{d}t$ (remarquons que $a_n > 0$ car $a_n \geqslant n > 0$).

Or les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\ \mathrm{d}t$ sont convergentes et a_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{a_n} tf'(t)f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tf'(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{a_n} f^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f^2(t)\ \mathrm{d}t$.

Enfin, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{h(a_n)}{2a_n} = 0$. Ainsi en passant à la limite dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\ \mathrm{d}t}\ .$$

3. On reprend les fonctions $g_1 : t \in I \mapsto tf(t)$ et $g_2 : t \in I \mapsto f'(t)$. Ces deux fonctions sont bien des éléments de E car elles sont continues sur I et de carré intégrable sur I. Donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire φ de E, on a : $\langle g_1|g_2\rangle^2 \leqslant \|g_1\|^2\ \|g_2\|^2$.

Donc, en traduisant avec les intégrales, on a :

$$\left(\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^{+\infty} t^2f^2(t)\ \mathrm{d}t\ \int_0^{+\infty} [f'(t)]^2\ \mathrm{d}t.$$

Ainsi compte-tenu de l'égalité obtenue à la question précédente :

$$\boxed{\left(\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\ \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^{+\infty} t^2\,[f(t)]^2\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2\ \mathrm{d}t\right) \qquad (*)}$$

4. On a égalité dans $(*)$ si et seulement si on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\langle g_1|g_2\rangle^2 \leqslant \|g_1\|^2\ \|g_2\|^2$ donc si et seulement si g_1 et g_2 sont colinéaires. Donc ceci est réalisé si et seulement si la fonction f est nulle ou si f est solution d'une équation différentielle du type : $f'(t) = atf(t)$ (H). Or les solutions de (H) sont les fonctions : $j_{a,\lambda} : t \in I \mapsto \lambda e^{at^2/2}$. Par toutes ces fonctions $j_{a,\lambda}$ les fonctions qui sont dans F sont celles pour lesquelles soit λ est nul soit a est strictement négative.

Ainsi : les fonctions f pour lesquelles il y a égalité dans $(*)$ sont :

$\boxed{\textbf{les fonctions } t \mapsto \lambda e^{-\alpha^2t^2} \textbf{ avec } (\alpha,\lambda) \in \mathbb{R}^2}$

EXERCICE 3

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles est noté Ω.
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $[\![0,k]\!]$.
On considère alors une suite $(X_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ de variables aléatoires de même loi et toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On suppose que les variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots, X_k$ et T sont mutuellement indépendantes.

On définit la variable aléatoire Y par : $\quad \forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$

1. Comme $([T=j])_{j\in[\![0,k]\!]}$ constitue un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales, on a :

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(Y=n) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(Y=n, T=j) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(T=j, X_0+\cdots+X_j=n)$.

Or les T et les X_i sont mutuellement indépendantes donc par le lemme des coalitions T et $X_0+\cdots+X_j$ sont indépendantes. Ainsi $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(Y=n) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(T=j)\mathbb{P}\left(X_0+\cdots+X_j=n\right)$.

On veut montrer que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(Y=n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} -n\mathbb{P}(Y=-n)$ sont absolument convergentes donc, comme les probabilités sont positives, on veut montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\left(\mathbb{P}(Y=n)+\mathbb{P}(Y=-n)\right)$ est absolument convergente.

Or X_0, X_1, ..., X_k admettent une espérance finie donc c'est aussi le cas pour X_0, X_0+X_1, $\ldots X_0+X_1+\cdots+X_k$.

Ainsi les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\left(\mathbb{P}(X_0=n)+\mathbb{P}(X_0=-n)\right)$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\left(\mathbb{P}(X_0+X_1=n)+\mathbb{P}(X_0+X_1=-n)\right), \ldots, \sum_{n\in\mathbb{N}} n\,(\mathbb{P}($

sont absolument convergentes. Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\left(\mathbb{P}(Y=n)+\mathbb{P}(Y=-n)\right)$ est une combinaison linéaire des séries précédentes avec les coefficients $\mathbb{P}(T=j)$, on en déduit qu'elle est absolument convergente donc que

$\boxed{Y \textbf{ possède une espérance finie}}$

2. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\left(\mathbb{P}(Y=n)+\mathbb{P}(Y=-n)\right)$ est combinaison linéaire des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\left(\mathbb{P}(X_0=n)+\mathbb{P}(X_0=-n)\right)$, ..., $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\left(\mathbb{P}(X_0+X_1+\cdots+X_k=n)+\mathbb{P}(X_0+X_1+\cdots+X_k=-n)\right)$ donc la somme de cette série est la combinaison linéaire des sommes de ces séries.

Or ces sommes sont les espérances respectives de X_0, X_0+X_1, ., $X_0+\cdots+X_k$.

Ainsi $\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(Y=j)\mathbb{E}\left(X_0+\cdots+X_j\right)$.

Or par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}\left(X_0+\cdots+X_j\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right)+\cdots+\mathbb{E}\left(X_j\right) = (j+1)\mathbb{E}\left(X_0\right)$ car les X_j ont la même espérance. Ainsi :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=0}^{k}(j+1)\mathbb{P}(Y=j)\mathbb{E}\left(X_0\right) = \sum_{j=0}^{k} j\mathbb{P}(Y=j)\mathbb{E}\left(X_0\right)+\sum_{j=0}^{k}(\mathbb{P}(Y=j)\mathbb{E}\left(X_0\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right)\mathbb{E}(T)+\mathbb{E}\left(X_0\right).$$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = (\mathbb{E}(T)+1)\,\mathbb{E}\left(X_0\right)}$.

3. On suppose que $\mathbb{E}\left(X_0\right)=0$ et que X_0^2 possède une espérance.
On en déduit donc que l'espérance de Y est nulle également.

On a $Y^2 \leqslant \left(\sum_{i=0}^{k}|X_i|\right)^2 = \sum_{i=0}^{k} X_i^2 + 2\sum_{i<j}|X_i||X_j| \leqslant \sum_{i=0}^{k} X_i^2 + \sum_{i<j}\left(X_i^2+X_j^2\right) \leqslant (k+1)\sum_{i=0}^{k} X_i^2$. Ainsi Y^2 a une espérance finie.

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\left(\mathbb{P}(Y=n)+\mathbb{P}(Y=-n)\right)$ est combinaison linéaire des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\left(\mathbb{P}(X_0=n)+\mathbb{P}(X_0=-n)\right)$, ..., $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\left(\mathbb{P}(X_0+X_1+\cdots+X_k=n)+\mathbb{P}(X_0+X_1+\cdots+X_k=-n)\right)$ donc la somme de cette série est la combinaison linéaire des sommes de ces séries.
Or ces sommes sont les espérances respectives de X_0^2, $(X_0+X_1)^2$, ., $(X_0+\cdots+X_k)^2$.
De plus, par indépendance linéaire et linéarité de l'espérance, on a :
$\mathbb{E}\left((X_0+\cdots+X_k)^2\right)=\sum_{i=0}^{j}\mathbb{E}\left(X_i^2\right)+\sum_{0\leqslant i<k\leqslant j}\mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left(X_k\right)=(j+1)\mathbb{E}\left(X_0^2\right)$ car les espérances des X_i sont nulles. Ainsi par linéarité de l'espérance :
$\mathbb{E}\left(Y^2\right)=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(Y=j)\mathbb{E}\left((X_0+\cdots+X_j)^2\right)=\sum_{j=0}^{k}(j+1)\mathbb{P}(Y=j)\mathbb{E}\left(X_0\right)^2$
Ainsi $\mathbb{E}\left(Y^2\right)=\sum_{j=0}^{k}j\mathbb{P}(Y=j)\mathbb{E}\left(X_0\right)^2+\sum_{j=0}^{k}(\mathbb{P}(Y=j)\mathbb{E}\left(X_0\right)^2=\mathbb{E}\left(X_0\right)^2\mathbb{E}(T)+\mathbb{E}\left(X_0\right)^2$.
Or d'après la formule de Koenig-Huygens, $\mathbb{V}(Y)=\mathbb{E}\left(Y^2\right)-\mathbb{E}(Y)^2$, donc comme $\mathbb{E}(X_0)=\mathbb{E}(Y)=0$, on obtient alors : $\boxed{\mathbb{V}(Y)=\left(\mathbb{E}(T)+1\right)\mathbb{V}\left(X_0\right)}$.

EXERCICE 4

PARTIE A. Recherche de zéro d'une fonction

1. **1.** La fonction f est continue et change de signe sur l'intervalle $[a, b]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, **f s'annule sur $[a, b]$** .

2. La recherche par dichotomie d'un zéro d'une fonction revient à construire les suites (a_n) et (b_n) suivantes, définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n + b_n}{2} \text{ si } f(a_n) f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leqslant 0, \\ a_n \text{ sinon} \end{cases}, \quad b_{n+1} = \begin{cases} b_n \text{ si } f(a_n) f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leqslant 0, \\ \dfrac{a_n + b_n}{2} \text{ sinon} \end{cases}$$

D'où le programme suivant

```python
def rech_dicho(f,a,b,eps):
    """f est une fonction continue telle que f(a)*f(b)<0,
    avec a<b, eps un flottant >0"""
    an = a #Initialisation
    bn = b
    while bn-an>eps: # Critere d'arret
        cn=(an+bn)/2
        if f(an)*f(cn)<=0:
            bn = cn
        else:
            an=cn
    return an,bn
```

2. **1.** Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. Alors $g(0) = f(0) - 0 \geqslant 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 1$. $0 \in [g(1), g(0)]$, g est continue sur l'intervalle $[0, 1]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de **$c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$, i.e. $f(c) = c$** .

2. On va utiliser l'idée de la preuve de la question précédente, et appliquer la dichotomie à la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

```python
def rech_pt_fixe(f,x,eps):
    """f est une fonction de [0,1] dans [0,1], continue"""
    def g(x): #Definition de la fonction auxilliaire
        return f(x) - x
    return rech_dicho(g,0,1,eps)
```

PARTIE B. Recherche dans une liste

1. **1.**

```
>>> L = [2,4,5,7,7,8,10]
>>> rech_dicho(L,1,5,6)
a= 1 ,  b= 5
a= 1 ,  b= 3
3
```

```
>>> rech_dicho(L,0,5,1)
a= 0 ,  b= 5
a= 0 ,  b= 2
a= 0 ,  b= 1
0
```

2. Le programme `rech_dicho(L,g,d,x)` **recherche** et **renvoie** une **position** `i` entre `g` et `d` telle que `L[i-1]`$\leqslant$ `x` $\leqslant$ `L[i]`, sachant que l'on suppose `L[g:d+1]` triée.

3. Si a_k et b_k sont les valeurs de `a` et `b` à la k-ième étape, alors $\dfrac{a_k+b_k}{2} - 1 \leqslant c_k \leqslant \dfrac{a_k+b_k}{2}$. Alors selon les deux cas de figure du test `if`, on obtient

$$b_{k+1} - a_{k+1} = c_k - a_k \leqslant \frac{a_k+b_k}{2} - a_k \leqslant \frac{b_k - a_k}{2},$$
$$\text{ou bien } b_{k+1} - a_{k+1} = b_k - (c_k+1) = b_k - c_k - 1 \leqslant b_k - \frac{a_k+b_k}{2} \leqslant \frac{b_k-a_k}{2},$$

donc, par une récurrence immédiate, $b_k - a_k \leqslant 2^{-k}(d-g+1)$, donc le programme s'arrête lorsque $b_k - a_k < 1$, en particulier lorsque $2^{-k}(d-g+1) < 1$, i.e. $k \geqslant \log_2(d-g+1)$, d'où une complexité en $O(\ln(d-g))$.

2. Pour trier par insertion une liste `L`, on part du premier élément de `L`, puis on **insère** le deuxième élément avant ou après ce premier élément, puis, de manière générale, lorsqu'on a une liste dont les k premiers éléments sont triés, on insère le $k+1$-ème dans ces k premiers éléments. Cette insertion se fait en deux étapes : la recherche de la position de l'élément à proprement parler, puis l'insertion de l'élément. On va effectuer cette insertion avec des permutations successives. On propose donc l'algorithme suivant :

```
def tri_dicho(L):
    for k in range(1,len(L)):
        if L[k]<L[k-1]: #Si on a besoin de bouger les elements
            i = rech_dicho(L,0,k-1,L[k]) #On recherche la position
                                         #de l'element a inserer.
            for j in range(k,i,-1):        #On fait des permutations,
                L[j],L[j-1] = L[j-1],L[j] # en partant de la fin
```

3. Dans le programme précédent et si $n =$ `len(L)`,

- Il y a une première boucle à $n-1$ étapes.
- Dans la boucle, on appelle `rech_dicho`, qui effectue $O(\ln(n))$ comparaisons, d'où $O(n\ln(n))$ comparaisons.
- Dans la boucle, on effectue $k - i = O(k)$ affectations, d'où $O(\sum_{k=1}^{n} k) = O(n^2)$ affectations.

Le tri par insertion classique est similaire, sauf pour la recherche de la position, pour laquelle on effectue $O(k)$ comparaisons. D'où, pour le tri par insertion classique, $O(n^2)$ affectations **et** $O(n^2)$ comparaisons. Ainsi, le tri par insertion dichotomique permet un gain de complexité en termes de comparaisons, mais pas en termes d'affectations.