Séries et algèbre linéaire

1 Transformation d'Abel

1. (a) Si $|z| < 1$ alors $\dfrac{z^n}{n^{1/3}} = o(1/n^2)$ (observer le module du quotient : croissances comparées des suites usuelles...), donc par comparaison à une série à termes positifs convergente :

$$\boxed{\sum \frac{z^n}{n^{1/3}} \text{ converge.}}$$

(b) Si $|z| > 1$ alors cette fois $\dfrac{|z^n|}{n^{1/3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (croissances comparées des suites usuelles à nouveau), donc :

$$\boxed{\sum \frac{z^n}{n^{1/3}} \text{ diverge grossièrement.}}$$

(c) Les deux cas particuliers sont des applications directes du cours : d'une part on a une série de Riemann et d'autre part on a une série alternée dont la valeur absolue du module tend vers 0 en décroissant :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^{1/3}} \text{ diverge, et } \sum \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} \text{ converge.}}$$

2. (a) Bien entendu :

$$\boxed{\text{Pour } r \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } S_r - S_{r-1} = \mathrm{e}^{ri\theta}.}$$

(b) Après avoir noté que la raison $\mathrm{e}^{i\theta}$ de la suite géométrique sous-jacente est différente de 1 ($0 < \theta < 2\pi$, et le cercle trigo finit de nous renseigner) on a directement :

$$\boxed{S_n = 1 + \mathrm{e}^{i\theta} + (\mathrm{e}^{i\theta})^2 + \cdots + (\mathrm{e}^{i\theta})^n = \frac{1 - \mathrm{e}^{(n+1)i\theta}}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}}\cdot}$$

(c) Dans l'expression précédente, le dénominateur est constant, et on peut majorer le module du numérateur par inégalité triangulaire :

$$|S_n| = \frac{\left|1 - \mathrm{e}^{(n+1)i\theta}\right|}{|1 - \mathrm{e}^{i\theta}|} \leqslant \frac{|1| + \left|\mathrm{e}^{(n+1)i\theta}\right|}{|1 - \mathrm{e}^{i\theta}|} = \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{i\theta}|}\cdot$$

$$\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$

3. (a) Dans T_n, on va substituer à $\mathrm{e}^{ik\theta}$ la valeur $S_k - S_{k-1}$, casser la somme en deux, et faire un changement d'indice ($K = k-1$) permettant de faire aparaître le terme S_K dans les deux sommes :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/3}}(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k^{1/3}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{k^{1/3}} = \sum_{K=1}^{n} \frac{S_K}{K^{1/3}} - \sum_{K=0}^{n-1} \frac{S_K}{(K+1)^{1/3}}$$

On va unifier ces deux sommes en mettant de côté les termes de bord :

$$\boxed{T_n = \frac{S_n}{n^{1/3}} - S_0 + \sum_{K=1}^{n-1} S_K \left(\frac{1}{K^{1/3}} - \frac{1}{(K+1)^{1/3}}\right)}$$

(b) On factorise bien entendu le terme principal :

$$\frac{1}{(k+1)^{1/3}} = \frac{1}{k^{1/3}}\,(1 + 1/k)^{-1/3} = \frac{1}{k^{1/3}}\,(1 - 1/3k + o(1/k))$$

donc $\dfrac{1}{k^{1/3}} - \dfrac{1}{(k+1)^{1/3}} = \dfrac{1}{3k^{4/3}} + (1/k^{4/3})$ et ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{k^{1/3}} - \frac{1}{(k+1)^{1/3}} \sim \frac{1}{3k^{4/3}} \text{ lorsque } k \text{ tend vers } +\infty.}$$

(c) Les questions précédentes nous assurent que $S_K\left(\dfrac{1}{K^{1/3}} - \dfrac{1}{(K+1)^{1/3}}\right) = O(1/K^{4/3})$, or $\sum \dfrac{1}{K^{4/3}}$ converge, donc par comparaison à une série positive, $\sum S_K\left(\dfrac{1}{K^{1/3}} - \dfrac{1}{(K+1)^{1/3}}\right)$ converge absolument donc converge, donc $\sum\limits_{K=1}^{n-1} S_K\left(\dfrac{1}{K^{1/3}} - \dfrac{1}{(K+1)^{1/3}}\right)$ possède une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. Puisque par ailleurs (S_n) est bornée, on a $\dfrac{S_n}{n^{1/3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite (S_n) converge, et ainsi :

$$\boxed{\sum \frac{\mathrm{e}^{ni\theta}}{n^{1/3}} \text{ converge.}}$$

2 Nilpotents d'indice 2 en dimension 3

1. (a) Le rang de u est celui de sa matrice le représentant dans n'importe quelle base... et celle dans $\mathcal{F}$ a clairement comme rang 1 (une seule colonne non nulle) :

$$\boxed{\mathrm{rg}(u) = 1}$$

(b) L'image de u est de dimension 1 et contient $u(f_3) = f_1$. De même, le noyau de u a pour dimension (théorème du rang) $3 - 1 = 2$ et contient f_1 et f_2 (d'après les deux premières colonnes de la matrice). Comme (f_1, f_2) est libre :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u) \text{ et } \mathrm{Im}\,(u) \text{ possèdent comme bases respectives } (f_1, f_2) \text{ et } (f_1).}$$

Et on note que l'image est incluse dans le noyau, ce qui n'a rien de choquant !

(c) On respecte des informations collectées précédemment :

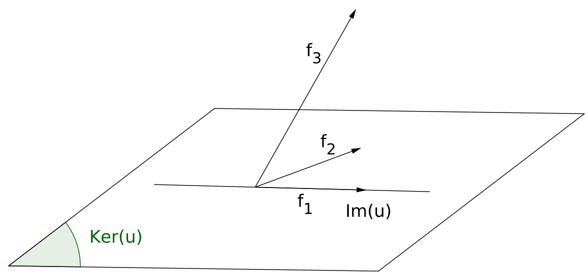

Figure 1 – La géométrie du problème

2. (a) D'une manière générale, $v \circ f = 0$ est équivalent à $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$, ce qui donne le résultat ici avec $f = v$.

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Ker}\,(v).}$$

Pour les sceptiques : tout habitant y de $\mathrm{Im}\,(f)$ s'écrit $f(x)$ pour un certain $x \in E$; on a alors $v(y) = v(f(x)) = (v \circ f)(x) = 0$, donc y est bien dans le noyau de v.

Le théorème du rang nous dit que la somme des dimensions de l'image et du noyau vaut $3 = 0 + 3 = 1 + 2$. L'inclusion précédente ne laisse qu'une possibilité (sachant que $\mathrm{Im}\,(v)$ n'est pas réduit à $\{0\}$: v était spécifié non nul) :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(v) \text{ est de dimension 1, et } \mathrm{Ker}\,(v) \text{ est de dimension 2.}}$$

(b) Fixons e_3 en dehors du noyau (c'est possible car $v \neq 0$). On définit alors $e_1 = v(e_3)$. On a alors e_1 qui est non nul (car $e_3 \notin \mathrm{Ker}\,(v)$) et qui appartient au noyau de v (car $v(e_1) = v(v(e_3)) = v^2(e_3) = 0$). En tant que famille libre du noyau, on peut le compléter en une base de $\mathrm{Ker}\,(v)$ à l'aide d'un vecteur (on sait que $\mathrm{Ker}\,(v)$ est de dimension 2) ; notons e_2 ce vecteur, et montrons que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

Il suffit de montrer la liberté (famille de 3 vecteurs en dimension 3) ; supposons donc : $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. En appliquant v, on obtient $\gamma v(e_3) = 0$ (les deux autres vecteurs sont dans le noyau de v) ; or $v(e_3) \neq 0$, donc $\gamma = 0$. Maintenant, $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$, or (e_1, e_2) est libre en tant que base de $\mathrm{Ker}\,(v)$. Ainsi, $\alpha = \beta = 0$, et la famille (e_1, e_2, e_3) est bien libre, puis constitue une base de E.

Par construction, la matrice de v dans cette base est exactement celle recherchée (e_1 et e_2 sont dans le noyau, et e_3 est envoyé sur e_1) :

$$\boxed{\mathrm{Mat}(v, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

(c) i. Tout d'abord : $w^9 = (w^3)^3 = v^3 = 0$: w est nilpotent. L'ensemble A des entiers i tels que $w^i = 0$ est donc non vide, donc possède un plus petit élément, disons k. Puisque $w^0 = \mathrm{Id}$ et $w^1 = w \neq 0$, on a $k \geqslant 1$. Par définition du minimum, on a alors $k - 1 \notin A$, donc $w^{k-1} \neq 0$, et bien entendu $w^k = 0$;

$$\boxed{\text{d'où l'existence de } k.}$$

ii. Puisque l'application w^{k-1} est non nulle :

$$\boxed{\text{il existe bien } x_0 \text{ tel que } w^{k-1}(x_0) \neq 0.}$$

iii. Considérons une combinaison linéaire nulle de cette famille [1] :

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 u(x_0) + \cdots + \alpha_{k-1} u^{k-1}(x_0) = 0$$

En appliquant u^{k-1} on obtient $\alpha_0 u^{k-1}(x_0) = 0$, donc $\alpha_0 = 0$. Si on injecte cette information dans la combinaison linéaire initiale et qu'on lui applique cette fois u^{k-2} on obtient $\alpha_1 u^{k-1}(x_0) = 0$, puis $\alpha_1 = 0$... « et ainsi de suite » : tous les α_i sont nuls.

$$\boxed{\big(x_0, u(x_0), ..., u^{k-1}(x_0)\big) \text{ est libre.}}$$

Pour ceux qui ne sont pas convaincus avec le « et ainsi de suite » : ce qui va suivre ne vous convaincra pas. Pour ceux qui sont convaincus mais qui ont peur que sur une copie « ça ne passe pas » : on peut au choix prouver que les coefficients sont nuls par récurrence avec prédécesseurs*, ou par l'absurde, en considérant le plus petit indice pour lequel un coefficient est non nul...*

iv. On dispose d'une famille à k éléments qui est libre, en dimension 3, donc $k \leqslant 3$. Ceci impose donc $w^3 = 0$, ce qui est absurde puisque $w^3 = v \neq 0$.

$$\boxed{\text{L'énoncé travaillait avec un } \textit{hypothétique } w \text{ tel que } w^3 = u... \text{ et un tel } w \text{ n'existe donc pas !}}$$

(d) i. Si $z^2 = v$, alors $v \circ z = z^2 \circ z = z^3 = z \circ z^2 = z \circ v$. La suite est quasiment un résultat de cours : si $x \in \mathrm{Ker}\,(v)$ alors $v(z(x)) = z(v(x)) = z(0) = 0$ donc $z(x) \in \mathrm{Ker}\,(v)$, ce qui prouve la stabilité de $\mathrm{Ker}\,(v)$ par z. C'est légèrement différent mais du même niveau pour l'image (et ici, je n'accepterais pas les « de même » : images et noyaux sont vraiment de nature différente). Fixons donc $y \in \mathrm{Im}\,(v)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = v(x)$. On a alors $z(y) = z(v(x)) = v(z(x))$ donc $z(y) \in \mathrm{Im}\,(v)$, et $\mathrm{Im}\,(v)$ est bien stable par z.

$$\boxed{v \text{ et } z \text{ commutent, ce dont on déduit que } \mathrm{Im}\,(v) \text{ et } \mathrm{Ker}\,(v) \text{ sont stables par } z.}$$

Des bases de l'image et du noyau de v étant connues, $e_1 \in \mathrm{Im}\,(v)$ donc on sait que $z(e_1)$ doit appartenir à l'image de v, donc est de la forme αe_1. De même pour $z(e_2)$, qui appartient à $\mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } z^2 = v, \text{ alors } \mathrm{Mat}(z, \mathcal{E}) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \alpha & \times & \times \\ 0 & \beta & \times \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}$$

1. Vous êtes partis autrement ? Poubelle !

ii. Poussons l'analyse plus loin : si $z^2 = v$, alors non seulement la matrice de z dans $\mathcal{E}$ est de la forme précédente, mais son carré vaut $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{E})$, donc en regardant les éléments diagonaux, on voit que $\mathrm{Mat}(z, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En mettant au carré cette matrice, on voit qu'on trouve la matrice de v si et seulement si $ac = 1$ (sans condition sur b).

$$\boxed{z^2 = v \text{ si et seulement si } \mathrm{Mat}(z, \mathcal{E}) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*.}$$

3 Quelques évaluations de restes

3.1 Sommation des relations de comparaison

1. *Dans la première partie, je prouve la convergence (absolue) de* $\sum \beta_n$*, mais vous pouviez aussi considérer que c'est du cours !*
On se place sous les hypothèses de l'énoncé. On note que cela impose $|\alpha_n| = o(\beta_n)$. On va privilégier cette série à termes positifs $\sum\limits_n |\alpha_n|$.

Le rapport $\dfrac{|\alpha_n|}{\beta_n}$ tend vers 0, donc pour n assez grand, disons $n \geqslant N$, on a $0 \leqslant \frac{|\alpha_n|}{\beta_n} \leqslant 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant |\alpha_n| \leqslant \beta_n$. On a alors :

$$\forall n \geqslant N, \qquad \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k| + \sum_{k=N}^{n} \beta_k \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k| + \sum_{k=N}^{+\infty} \beta_k$$

(on a majoré la somme partielle de la série de réels *positifs* $\sum\limits_{n \geqslant N} \beta_n$ par la somme « totale » ; il n'est pas question d'un passage partiel d'inégalité à la limite !). Ainsi, la suite de terme général $\sum\limits_{k=0}^{n} |\alpha_k|$ est croissante et majorée [2] donc est convergente.

$$\boxed{\text{La série } \textstyle\sum \alpha_n \text{ est donc absolument convergente, donc convergente.}}$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$, et montrons que pour n assez grand, on aura

$$0 \leqslant \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \beta_k.$$

Il existe un rang N au delà duquel $0 \leqslant |\alpha_k| \leqslant \beta_k$. Si on fixe $n \geqslant N$ et $p \geqslant n+1$, on a alors par inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} \alpha_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \underbrace{|\alpha_k|}_{\leqslant \varepsilon \beta_k} \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p} \beta_k.$$

Lorsque p tend vers $+\infty$, les membres de droite et de gauche admettent l'un et l'autre une limite. On peut alors passer cette inégalité à la limite en p, pour obtenir exactement le résultat souhaité :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geqslant N, \qquad \left| \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k}{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \beta_k} \right| \leqslant \varepsilon.$$

$$\boxed{\text{Si } \alpha_n = o(\beta_n) \text{ avec } \beta_n > 0 \text{ et } \textstyle\sum \beta_n \text{ convergente, alors } \sum \alpha_n \text{ est convergente, et } \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k = o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \beta_k\right).}$$

2. Oui, par une constante...

2. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a $a_n = b_n + o(b_n)$, donc on pose $\alpha_n = a_n - b_n$ et $\beta_n = b_n$, de sorte que $\alpha_n = o(\beta_n)$. Puisque $\sum\limits_n \beta_n$ est convergente à termes positifs, on a $\sum\limits_n \alpha_n$ convergente, avec $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k = o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \beta_k\right)$. Mais puisque $a_n = b_n + \alpha_n$, cela nous assure que $\sum\limits_n a_n$ est convergente, avec de plus $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k + o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$, et donc :

   $$\boxed{\text{Si } a_n \sim b_n \text{ avec } b_n > 0 \text{ et } \sum_n b_n \text{ convergente, alors } \sum_n a_n \text{ est convergente, et } \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.}$$

3. Si $\sum\limits_n \alpha_n$ est une série (de réels) alternée (i.e. : $((-1)^n \alpha_n)_n$ est de signe constant) avec $(|\alpha_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 *en décroissant*, alors :
   - $\sum\limits_n \alpha_n$ est convergente ;
   - si $n \in \mathbb{N}$ et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k$, alors R_n est du signe de α_{n+1} (son premier terme), et $|R_n| \leqslant |\alpha_{n+1}|$.

3.2 Développement asymptotique des restes de Riemann

1. C'est reparti...

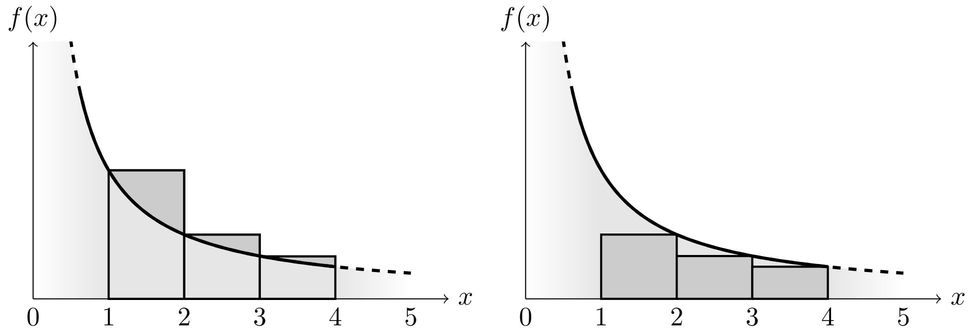

FIGURE 2 – Dans un sens... et dans l'autre

On fixe $n \geqslant 1$ et N dans $\mathbb{N}$ tels que $n < N$, puis $k \in [\![n+1, N]\!]$ et enfin $t \in [k-1, k]$ (ils seront libérés dans l'ordre inverse de celui de leur arrivée à l'écran). Puisque $k \geqslant 2$, la décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ sur $[k-1, k] \subset [1, +\infty[$ assure que $\dfrac{1}{k^3} \leqslant \dfrac{1}{t^3}$. Ceci étant valable pour tout $t \in [k-1, k]$, on peut intégrer cette inégalité pour obtenir $\dfrac{1}{k^3} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$. Un travail parfaitement symétrique fournit la minoration de $\dfrac{1}{k^3}$ qu'on imagine, et il n'y a plus qu'à sommer ces encadrements, pour k décrivant $[\![n+1, N]\!]$, pour obtenir :

$$\underbrace{\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^3}}_{(1/(n+1)^2 - 1/(N+1)^2)/2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \underbrace{\int_{n}^{N} \frac{dt}{t^3}}_{(1/n^2 - 1/N^2)/2}.$$

Dans cet encadrement, **chacun des trois termes possède une limite (finie)** lorsque N tend vers $+\infty$. L'encadrement peut alors être passé à la limite en N, pour obtenir :

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

En divisant tout le monde par $\dfrac{1}{2n^2}$, les termes extérieurs tendent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, donc les gendarmes nous assurent qu'il en va de même pour le terme central. On vient de prouver :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}\cdot}$$

2. La décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ fournirait d'abord (les n et N étant fixés puis libérés comme plus haut) :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}$$

puis :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

en enfin (ce qui est cohérent avec le cas $\alpha = 3$) :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\cdot}$$

3. On commence par calculer :

$$u_{n-1} - u_n = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2n^2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-2}\right).$$

Le développement limité $(1+u)^{-2} = 1-2u+\dfrac{(-2)(-3)}{2}u^2+o(u^2)$ fournit alors après simplifications : $u_{n-1} - u_n = -\dfrac{3}{2n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$, et donc :

$$\boxed{u_{n-1} - u_n \sim -\frac{3}{2n^4}\cdot}$$

4. Il s'agit bien entendu (?) de considérer une somme partielle du reste... On fixe pour cela $N \geqslant n+1$, et on écrit après télescopage :

$$\sum_{k=n+1}^{N} (u_{k-1} - u_k) = u_n - u_N.$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, les deux membres admettent une limite finie : à droite c'est clair puisque $u_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci implique la convergence de la série du membre de gauche [3]. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient alors par unicité de la limite :

$$\boxed{u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_{k-1} - u_k).}$$

5. Les deux questions précédentes permettent d'appliquer le théorème de sommation des équivalents pour les restes de séries convergentes positives (bon, disons de signe constant !), et donc :

$$u_n \sim -\frac{3}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^4}\cdot$$

La question 2 donne un équivalent de ce reste, donc de u_n. En revenant à la définition de u_n, on trouve finalement (et c'est cohérent avec le cas $\alpha = 3$) :

3. On pouvait aussi voir que l'équivalent fourni à la question précédente est négatif et est le terme d'une série convergente...

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}=\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

Bon, j'ai vérifié avec Maple :

```
> asympt(sum(1/k**3,k=n+1..infinity),n,4);
```

$$\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

6. Avec la même démarche, mais en serrant les dents pour ne pas craquer sous le poids du paramètre, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}-\frac{1}{2n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}$$

```
> asympt(sum(1/k**alpha,k=n+1..infinity),n,20);
Error, (in asympt) unable to compute series
> asympt(sum(1/k**7,k=n+1..infinity),n,8);
```

$$\frac{1}{6n^6}-\frac{1}{2n^7}+O\left(\frac{1}{n^8}\right)$$

7. Il suffit de réitérer le procédé, en définissant $v_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}-\left(\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}-\frac{1}{2n^\alpha}\right)$, en obtenant un équivalent simple de $v_{n-1}-v_n$ (de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha+2}}$, a priori), et en sommant pour obtenir un équivalent de v_n de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ a priori.

8. Yapluka ! Notons, pour $n>0$:

$$v_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^6}-\left(\frac{1}{5n^5}-\frac{1}{2n^6}\right).$$

On a alors après calculs (la flemme...) :

```
> v:=n->sum(1/k**6,k=n+1..infinity)-(1/(5*n**5)-1/(2*n**6)):
  asympt(v(n-1)-v(n),n,8);
```

$$\frac{7}{2n^8}+O\left(\frac{1}{n^9}\right)$$

Ainsi, $v_{n-1}-v_n\sim\frac{7}{2n^8}$, équivalent entre termes généraux positifs de séries convergentes : les restes sont alors équivalents, ce qui nous donne un équivalent de v_n toujours via la question 2, et ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{1}{5n^5}-\frac{1}{2n^6}+\frac{1}{2n^7}+o\left(\frac{1}{n^7}\right)}$$

```
> asympt(sum(1/k**6,k=n+1..infinity),n,8);
```

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{1}{5n^5}-\frac{1}{2n^6}+\frac{1}{2n^7}+O\left(\frac{1}{n^8}\right)$$

3.3 Un cas alterné

1. Il n'est évidemment pas question d'écrire une petite blague de la forme :

$$\lim_n \left(\int_0^1 f_n(x)dx \right) = \int_0^1 (\lim_n f_n(x))dx.$$

Pour ce type d'interversion, les 5/2 auront peut-être appliqué le *théorème de convergence dominée*, qui s'appliquait très facilement ici, en dominant par l'application constante égale à 1.
De façon élémentaire, on pouvait également écrire :

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n,$$

puis intégrer cet encadrement pour obtenir

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

avant de gendarmiser.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

2. La série $\sum\limits_{n>0} \frac{(-1)^n}{n}$ est bien alternée, et son terme général tend vers 0 en décroissant (en valeur absolue), donc d'après le théorème rappelé dans la première partie :

$$\boxed{\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n} \text{ est convergente, avec } R_n \text{ du signe de } (-1)^{n+1} \text{ et } |R_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\cdot}$$

3. Fixons d'abord $n > 0$ et calculons la somme partielle :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{k-1} dx = -\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1} \right) dx = \int_0^1 \frac{(-x)^n - 1}{1+x} dx.$$

On a alors (grâce à la première question) $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell = -\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\cdot$ Mais par définition, $R_n = \ell - S_n$, donc on a bien comme annoncé :

$$\boxed{R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.}$$

4. On intègre par parties comme suggéré dans l'énoncé, en primitivant $x \mapsto x^n$:

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx.$$

D'une part, $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et d'autre part, la majoration $\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leqslant x^{n+1}$ nous assure que $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \leqslant \frac{1}{n+2}$, de sorte que :

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

```
> asympt(sum((-1)**k/k,k=n+1..infinity),n,2);
```

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

5. La série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ est bien entendu convergente. Pour celle de terme général $\beta_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la comparaison à une série convergente à termes positifs nous assure son absolue convergence donc sa convergence.
Pour calculer la somme, on passe comme proposé par le calcul des sommes partielles, qui font à nouveau intervenir des sommes (finies) d'intégrales, donc des intégrales de sommes. La magie des suites géométriques fait le reste. Soit donc $n\in\mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n}R_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=-\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-x)^n\right)\frac{dx}{1+x}=\int_0^1\frac{(-x)^{n+1}-1}{(1+x)^2}dx.$$
D'une part, $-\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=-\frac{1}{2}$, et d'autre part,
$$\left|\int_0^1\frac{(-x)^{n+1}}{(1+x)^2}dx\right|=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}dx\leqslant\int_0^1x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$
Ainsi :
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}R_n=-\frac{1}{2}.}$$

```
> sum(sum((-1)**k/k,k=n+1..infinity),n=0..infinity);
```

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(-1)^{n+1}\left(\Psi\left(1+\frac{1}{2}n\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$-.5000000000$$

Les 5/2 ayant voulu écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ *avaient deux résultats à leur disposition. Le premier réclame la convergence de la série* $\displaystyle\sum_n\int_0^1|f_n|$ *: IL NE PEUT S'APPLIQUER (cette série diverge). Le second résultat réclame une convergence* uniforme *des sommes partielles* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f_k$ *sur le segment* $[0,1]$*. Le contrôle des restes de ces séries alternées par leur premier terme ne permet malheureusement pas de conclure (ce premier terme* $\frac{x^n}{1+x}$ *tend effectivement vers* 0*... mais pas uniformément sur* $[0,1]$*). Dommage...*