Séries et algèbre linéaire

Le 3 octobre 2020 – calculatrices autorisées

1 Transformation d'Abel

On s'intéresse ici à la convergence de $\sum \dfrac{z^n}{n^{1/3}}$.

1. Des cas simples :
   (a) Justifier la convergence absolue de $\sum \dfrac{z^n}{n^{1/3}}$ lorsque $|z| < 1$.
   (b) Justifier la divergence grossière de $\sum \dfrac{z^n}{n^{1/3}}$ lorsque $|z| > 1$.
   (c) Étudier la convergence lorsque $z = 1$ et lorsque $z = -1$.

   Dans la suite de cet exercice, on fixe $\theta \in]0, 2\pi[$ puis $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, et on se propose de montrer la convergence de $\sum \dfrac{z^n}{n^{1/3}}$.

2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.
   (a) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, que vaut $S_r - S_{r-1}$?
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer S_n.
   (c) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. On définit maintenant, pour $n \geqslant 1$: $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k^{1/3}}$.
   (a) Exprimer T_n à l'aide d'une autre somme faisant intervenir les S_k.
   (b) Donner un équivalent simple de $\dfrac{1}{k^{1/3}} - \dfrac{1}{(k+1)^{1/3}}$ lorsque k tend vers $+\infty$.
   (c) Conclure.

2 Nilpotents d'indice 2 en dimension 3

Dans tout l'exercice, l'espace E dans lequel on travaille est de dimension 3. On s'intéresse aux $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $v \neq 0$ et $v^2 = 0$.

1. On suppose que $u \in \mathcal{L}(E)$ possède pour matrice dans une base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$:

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer le rang de u.
   (b) Donner une base du noyau puis de l'image de u.
   (c) Faire un dessin où on voit tout ce beau monde (les f_i, l'image et le noyau).
2. À partir de maintenant, v est un endomorphisme de E non nul, et tel que $v^2 = 0$.
   (a) Justifier : $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$. À l'aide du théorème du rang, en déduire les dimensions du noyau et de l'image de v.

(b) Construire une base de E telle que la matrice de v dans cette base vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On partira de e_3 en dehors du noyau, on construira e_1 et e_2 de façon adéquate, on vérifiera que (e_1, e_2, e_3) est effectivement une base de E... et on pourra conclure sans mal.

(c) On suppose ici que $w \in \mathcal{L}(E)$ vérifie : $w^3 = v$.

i. Justifier l'existence d'un entier $k \geqslant 2$ tel que $w^k = 0$ et $w^{k-1} \neq 0$.

ii. Montrer qu'il existe x_0 tel que $w^{k-1}(x_0) \neq 0$.

iii. Montrer que $\big(x_0, w(x_0), ..., w^{k-1}(x_0)\big)$ est libre.

iv. En déduire : $k \leqslant 3$. Que peut-on conclure ?

(d) On cherche les $z \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $z^2 = v$ (équation qu'on ne suppose pas vérifiée par défaut, BIEN ENTENDU : vous savez que « je cherche » ne signifie pas « je dispose de »...).

i. Montrer que **si on a effectivement** $z^2 = v$, alors v et z commutent, puis que $\mathrm{Ker}\,(v)$ et $\mathrm{Im}\,(v)$ sont stables par z. En déduire la **forme nécessaire** de la matrice de z dans une base adaptée.

ii. Déterminer tous les endomorphismes z de E vérifiant $z^2 = v$.

3 Quelques évaluations de restes

On va voir dans ce problème quelques techniques permettant d'évaluer des équivalents puis des développements asymptotiques de restes de séries convergentes.

À titre exceptionnel, il y a UNE question en ε... et c'est la première ! *Cette question n'est pas simple mais est tout à fait traitable. Attention, je ne la corrigerai que si vous commencez par expliquer CE QUE VOUS ENTENDEZ MONTRER, puis vous fixez $\varepsilon > 0$, et que vous terminez par une majoration d'une certaine quantité par ε (juste avant de conclure). Si en plus les valeurs absolues sont correctement traitées, ça rapportera évidemment beaucoup !*

3.1 Sommation des relations de comparaison

On ne s'intéresse ici qu'à des séries de réels.

1. Prouver que si $\alpha_n = o(\beta_n)$ avec $\beta_n > 0$ et $\sum\limits_n \beta_n$ convergente, alors $\sum\limits_n \alpha_n$ est convergente, et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k = o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \beta_k\right)$.
2. Prouver que si $a_n \sim b_n$ avec $b_n > 0$ et $\sum\limits_n b_n$ convergente, alors $\sum\limits_n a_n$ est convergente, et
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$
Ici, les ε sont interdits, mais on pourra utiliser le résultat de la question précédente !

   On admettra les résultats analogues dans le cas où $\sum \beta_n$ diverge et est à termes positifs :
   - si $\alpha_n = o(\beta_n)$ alors $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k\right)$ (sans information de divergence sur $\sum\limits_n \alpha_n$) ;
   - si $\alpha_n \sim \beta_n$, alors $\sum \alpha_n$ diverge, et $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \sim \sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k$.
3. Énoncer soigneusement (mais sans démonstration) le théorème relatif aux séries alternées. On donnera en particulier les informations connues sur le reste.

3.2 Développement asymptotique des restes de Riemann

On s'intéresse au reste de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$. On commence par traiter le cas $\alpha = 3$ en détail, avant de généraliser.

1. À l'aide d'une comparaison somme-intégrale, établir un équivalent de la forme :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{K_1}{n^\beta},$$

avec K_1 et β à déterminer.

On commencera par encadrer une somme de la forme $\sum\limits_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3}$*, puis on ne libérera SURTOUT PAS n et N en même temps ! Je serai extrêmement vigilant sur les « on passe à la limite » qui ne veulent rien dire...*

2. Avec des justifications rapides, donner un résultat de même nature pour $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

3. On pose maintenant :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} - \frac{K_1}{n^\beta}.$$

Attention, prenez les « vraies » valeurs de K_1 et β, c'est-à-dire celles exhibées à la première question !

Déterminer K_2 et γ tels que :

$$u_{n-1} - u_n \sim \frac{K_2}{n^\gamma}.$$

4. Justifier[1] l'écriture : $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (u_{k-1} - u_k)$.

5. En déduire un développement asymptotique à deux termes de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}$.

6. Avec une rapide justification, obtenir de même un développement asymptotique à deux termes de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

7. Comment obtenir un développement asymptotique à trois termes ? *Ici je ne demande que les idées.*

8. Donner un développement asymptotique à trois termes de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^6}$.

3.3 Un cas alterné

1. Montrer soigneusement :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et NON, chers 3/2, vous ne passerez pas à la limite sous l'intégrale...

2. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n>0} \dfrac{(-1)^n}{n}$; donner le signe et un majorant de $|R_n|$, avec

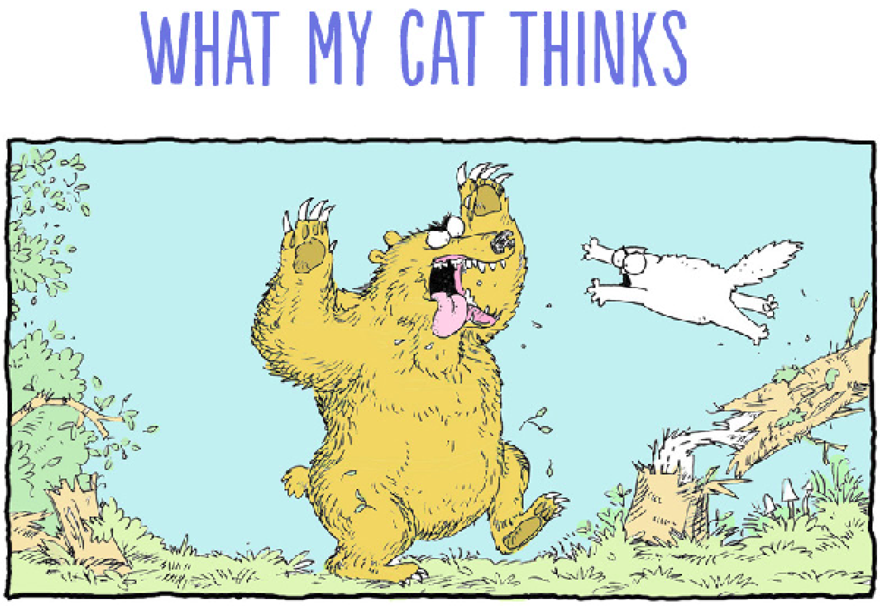
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Non, pas avec les mains.

3. Montrer :
$$\forall n \geqslant 0, \qquad R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$
On pourra calculer la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ *en la voyant comme une intégrale...*

4. En déduire[2] :
$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{K}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right),$$
avec α et K à déterminer.

5. Justifier la convergence, puis calculer la somme de la série $\sum_{n \geqslant 0} R_n$.
Les 3/2 éviteront la petite farce consistant à intervertir une intégrale et une somme... de série ! Ils pourront passer par les sommes partielles. Les vaillants 5/2 feront bien ce qu'ils veulent.



2. Éventuellement après une intégration par parties...