Pour le lundi 21 septembre 2020

1 Un développement limité

Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \left(a \ln(n-1) + b \ln(n) + c \ln(n+1)\right)$$

soit convergente.

2 Produits infinis

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels de $]-1, 1[$, et on note $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + u_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Si la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on désigne sa limite par $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$. Si de plus cette limite est non nulle, on dit que *le produit infini* $\prod(1 + u_n)$ *converge.*

1. On suppose que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in [0, 1[$. Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.
   On traitera à part le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* 0.
2. On suppose que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in]-1, 0]$.
   (a) Que peut-on dire de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ si $\sum u_n$ diverge ?
   (b) Montrer que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement positif si et seulement si $\sum u_n$ converge.
3. Étudier la convergence et calculer la limite de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants :
   (a) $u_n = -\dfrac{1}{(n+1)}$;
   (b) $u_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$;
   (c) $u_n = -\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.
4. Dans cette question, on suppose seulement que la série $\sum u_n^2$ converge. Montrer que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite non nulle si et seulement si $\sum u_n$ converge.
5. Que dire de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ si la série $\sum u_n$ converge absolument ?
6. (a) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $\dfrac{\mathrm{th}(t)}{\mathrm{th}(t/2)} = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$.
   (b) Soit $x > 1$ et soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_1 = x$ et la relation de récurrence

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_{n+1} = 2v_n^2 - 1.$$

   Montrer l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{v_k}\right)$.
7. Soit $\theta \in]0, \pi/2[$. On pose $u_n = \tan^2\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer l'existence et calculer la valeur de $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$.