Psi 999 – 2022/2023 ψ **DS 1 - corrigé**

1 Hum...

1.1 Une relation de récurrence du premier ordre

On va bien entendu étudier l'application

$$f : x \mapsto x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cdot$$

Tout d'abord, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\sin x \geqslant 1 - \dfrac{1}{2} > 0$, donc f est (strictement) croissante. Ensuite, le signe de $f(x) - x$ est celui de $\cos x + \dfrac{1}{2}$ et donc :

$$f(x) = x \quad\iff\quad \cos x = -\frac{1}{2} \quad\iff\quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pm 2\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

et par ailleurs :

$$f(x) \geqslant x \quad\iff\quad \cos x \geqslant -\frac{1}{2} \quad\iff\quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in [-2\pi/3 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k\pi]$$

Sur $[-2\pi, 0]$ par exemple, $f(x) - x$ est nul en $-4\pi/3$ et $-2\pi/3$, négatif entre ces deux valeurs, et positif en dehors.
Ceci nous permet de représenter le graphe de f au voisinage de $-\pi$, et l'escalier usuel partant de $u_0 = -\pi$:

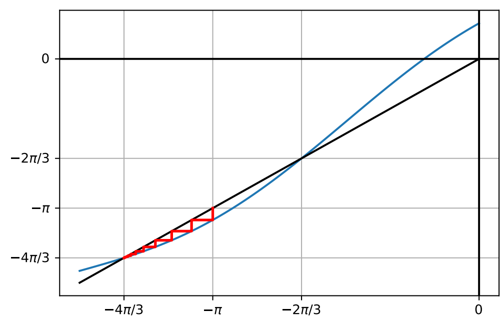

Figure 1 – L'escalier usuel

Nous voila convaincus que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-4\pi}{3}\cdot$$

Déroulons les arguments usuels :

- Puisque f est croissante, $-4\pi/3 \leqslant x \leqslant -2\pi/3$ implique $-4\pi/3 = f(-4\pi/3) \leqslant f(x) \leqslant f(-2\pi/3) = -2\pi/3$, autrement dit : $I = [-4\pi/3, -2\pi/3]$ est stable par f.
- Puisque u_0 appartient à l'intervalle I qui est stable par f, on a également $u_1 = f(u_0)$ qui appartient à I, et par récurrence immédiate, tous les u_n sont dans I. Enfin... comme c'est la première fois... On note donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_n \in I$ ».
  - $u_0 \in I$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
  - Si $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée avec n fixé, on a $u_n \in I$, or I est stable par f, donc $f(u_n) \in I$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \in I$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$, et termine la récurrence.

— Pour $x \in I$, on a $f(x) \leqslant x$, donc d'après le point précédent, on a pour tout n : $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $-4\pi/3$, donc est convergente ; notons ℓ sa limite.
— La continuité de f en ℓ nous assure que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Mais par ailleurs, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (suite extraite). La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ nous assure alors (unicité de la limite) : $\ell = f(\ell)$, donc ℓ est de la forme $\pm 2\pi/3 + 2k\pi$.
— L'inégalité $-4\pi/3 \leqslant u_n \leqslant u_0 = -\pi$ (celle de droite venant de la décroissance de u) passée à la limite nous assure : $-4\pi/3 \leqslant \ell \leqslant -\pi$.
— Sur $[-4\pi/3, -\pi]$, le seul réel point fixe de f est $-4\pi/3$, qui est donc la limite de u.

Comme annoncé plus haut :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-4\pi}{3}\cdot}$$

1.2 Un calcul de somme

1. Tout d'abord, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{1}{n^3}\cdot$ La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^3}$ est notoirement convergente $(3 > 1)$, donc par comparaisons de séries *à termes positifs* :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ est convergente.}}$$

2. Pour la décomposition en éléments simples, on commence par écrire la forme a priori :

$$F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}.$$

On évalue ensuite $XF = \dfrac{1}{(X+1)(X+2)} = a + b\dfrac{X}{X+1} + c\dfrac{X}{X+2}$ en 0 pour trouver d'une part a et d'autre part $\frac{1}{2}$; etc.

$$\boxed{\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}\cdot}$$

3. Pour $N \geqslant 1$, on va collisionner :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{N+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N+2}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right),
\end{aligned}$$

et on obtient en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}\cdot}$$

Si vous avez collisionné avec des petits points, ça me va aussi.

1.3 Une asymptote

Tout d'abord,on a (quasiment gratuitement) : $f(x) \sim x$, ou encore : $f(x) = x + o(x)$. On garde en tête qu'on souhaite un développement de la forme $f(x) = ax + b + o(1)$; et même $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + o(1/x)$ pour avoir les positions relatives.

Faisons comme si nous avions oublié les histoires de positions relatives en ne calculant que un terme au delà de l'aquivalent (vous allez voir : on ne perd par tant de temps que ça, et ceux peu sûrs d'eux pourront gagner en confiance avec ce genre de calcul. On va donc estimer chaque terme du produit avec un terme au delà de l'équivalent :
D'une part $(x^3+2x^2+x+9)^{1/3} = x\left(1+2/x+o(1/x)\right)^{1/3} = x\left(1+2/3x+o(1/x)\right)$ et d'autre part $\mathrm{e}^{2/x} = 1+2/x+o(1/x)$ donc :

$$f(x) = x\left(1+2/3x+o(1/x)\right)\left(1+2/x+o(1/x)\right) = x\left(1+(2+2/3)/x++o(1/x)\right)$$

donc :

$$f(x) = x+8/3+o(1/x)$$

$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ possède en } +\infty \text{ la droite d'équation } y = x+8/3 \text{ comme asymptote.}}$$

Reprenons ce calcul avec un terme de plus. C'est facile pour l'exponentielle : $\mathrm{e}^{2/x} = 1+2/x+(2/x)^2/2+o(1/x^2) = 1+2/x+2/x^2+o(1/x^2)$. Pour le premier terme, on va utiliser :

$$(1+u)^{1/3} = 1+u/3+\frac{(1/3)(1/3-1)}{2}u^2+o(u^2) = 1+u/3-u^2/9+o(u^2)$$

qui nous donne :

$$(x^3+2x^2+x+9)^{1/3} = x\left(1+2/x+1/x^2+o(1/x^2)\right)^{1/3} = x\left(1+2/3x+(1/3-4/9)/x^2+o(1/x^2)\right)$$

soit encore : $(x^3+2x^2+x+9)^{1/3} = x\left(1+2/3x-1/9x^2+o(1/x^2)\right)$ et il nous reste à multilplier par le terme calculé plus haut :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1+2/3x-1/9x^2+o(1/x^2)\right)\left(1+2/x+2/x^2+o(1/x^2)\right) \\ &= x\left(1+(2+2/3)/x+(2+4/3-1/9)/x^2+o(1/x^2)\right) \\ &= x+8/3+29/30x+o(1/x) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x)-(x+8/3)$ est équivalent à $29/30x$ lorsque x tend vers $+\infty$. Le rapport de ces quantités tend vers 1 donc est positif pour x assez grand, donc $f(x)-(x+8/3)$ est positif pour x assez grand :

$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ est situé au dessus de son asymptote.}}$$

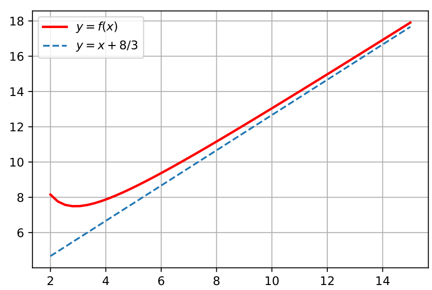

Figure 2 – Ça semble cohérent

2 Du cours

1. Montrons calmement chaque implication (il est HORS DE QUESTION de travailler par équivalence). Fixons pour cela une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

— $\Longrightarrow$: supposons f injective et montrons que son noyau vaut $\{0_E\}$. Puisque $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous-espace de E, il contient 0_E, et il n'y a donc qu'une inclusion à montrer. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$. On a alors $f(x) = 0 = f(0)$ (car f est linéaire). Puisque f est injective, l'égalité $f(x) = f(0)$ impose $x = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \{0_E\}$.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est injective, alors } \mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}.}$$

— $\Longleftarrow$: réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$ et montrons que f est injective. Pour cela, on suppose $f(x_1) = f(x_2)$ (avec x_1 et x_2 dans E) et on montre : $x_1 = x_2$.
La linéarité de f permet d'écrire $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0$, donc $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}\,(f)$, donc $x_1 - x_2 = 0$, donc $x_1 = x_2$, et on vient de montrer que f est injective.

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}, \text{ alors } f \text{ est injective.}}$$

2. Avec les notations de l'énoncé, on veut montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est libre ; on part donc d'une combinaison linéaire nulle de cette famille, et on va montrer qu'elle est triviale [1]. Supposons donc : $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$. Il semble d'appliquer u, et on obtient par linéarité :

$$\lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_n u(e_n) = 0.$$

Mais la famille $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est libre, donc cette combinaison linéaire nulle est forcément triviale : tous les λ_i sont nuls.
Mais mais mais... c'est ce qu'on voulait montrer !

$$\boxed{(e_1, ..., e_n) \text{ est libre.}}$$

3. Notons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\cdot$ Pour montrer la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on commence par noter que cette suite est croissante ($S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant S_n$) et il suffit donc de montrer qu'elle est majorée (et pas par une autre suite, BIEN ENTENDU). L'outil essentiel dans ce type de situation est la comparaison somme-intégrale.

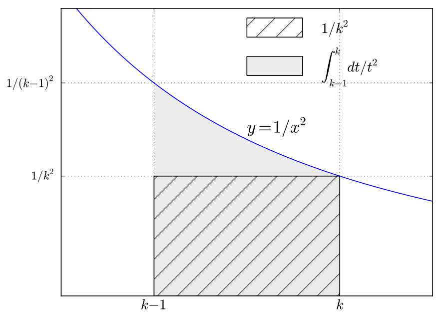

FIGURE 3 – Toujours le même dessin

Le dessin usuel commence par nous convaincre que pour $k - 1 > 0$, on a $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}\cdot$ Pour montrer cette relation cruciale, on peut (sur ce cas très précis) calculer le membre de droite et constater qu'accidentellement il est minoré par celui de gauche. Mais il vaut bien mieux ne rien calculer, et plutôt noter que pour t tel que $k - 1 \leqslant t \leqslant k$, on a $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, puis intégrer l'inégalité entre les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{k^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}\cdot$ On obtient alors :

$$\forall k \geqslant 2, \qquad \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}\cdot$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 2 à $n \geqslant 2$ fixé, on obtient après Chaslisation :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^2},$$

1. Vous avez voulu tout de suite exploiter les hypothèses ? c'est donc fichu d'avance...

puis :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad S_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^2} = 2 - \frac{1}{n}\cdot$$

Sauf à vouloir faire une petite farce, on ne conclut pas directement quand au caractère majoré de S_n (le membre droite dépend de n...). Par contre, sans gros effort (mais surtout pas via un passage d'inégalité à la limite...), on obtient $S_n \leqslant 2$, qui est cette fois une majoration convenable. Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc converge.

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$$

Notons maintenant, pour $n \geqslant 1$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot$ Pour montrer la divergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on va *minorer* S_n, grâce à nouveau à une comparaison somme-intégrale.

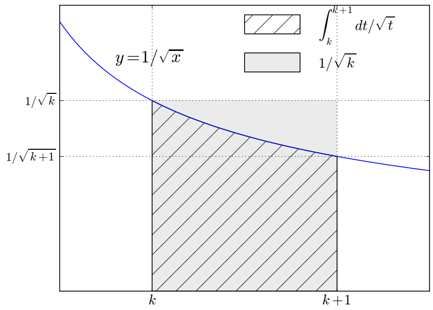

Figure 4 – Le dual du dessin précédent.

Les techniques précédentes nous assurent que pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}}\cdot$ Une sommation plus tard, on obtient

$$S_n \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2t^{1/2}\right]_1^{n+1} = 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right).$$

Comme le membre de droite tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ il en va de même pour le membre de gauche.

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}}$$

4. Pour montrer l'équivalent souhaité de $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, on réalise cette fois un *encadrement* de $1/k$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t},$$

la deuxième inégalité n'étant valable que pour $k \geqslant 2$. En sommant, on trouve $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$. Bien entendu, $1 + \ln n \sim \ln n$ et par ailleurs, $\ln(n+1) = \ln\left(n(1+1/n)\right) = \ln n + \ln(1 + 1/n) \sim \ln n$, donc dans l'encadrement

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leqslant \frac{H_n}{\ln n} \leqslant \frac{1 + \ln n}{\ln n},$$

les deux terme extérieurs convergent vers 1, ce qui permet de gendarmiser : le terme central tend aussi vers 1, ce qui nous donne bien l'équivalent souhaité.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n}$$

.

3 Autour des séries de Bertrand

1. (a) Il suffit de noter que $\dfrac{1}{n^2\ln^3 n} = o(1/n^2)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = o(\ln^5 n/\sqrt{n})$ puis d'invoquer la comparaision entre des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^2\ln^3 n} \text{ est convergente et } \sum \frac{\ln^5 n}{\sqrt{n}} \text{ est divergente.}}$$

Le deuxième cas est peut-être moins clair puisqu'il s'obtient en raisonnant par l'absurde : si $\sum \dfrac{\ln^5 n}{\sqrt{n}}$ *était convergente, alors* $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *le serait aussi...*

(b) Le terme général $\dfrac{(\ln n)^{10}}{n^2}$ est certes « plus gros que $\dfrac{1}{n^2}$ », terme général d'une série convergente (ce n'est donc pas dans le bon sens), mais il est négligeable devant tout terme de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha}$ coincé entre $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n}\cdot$ Plus précisément :

$$\frac{\frac{(\ln n)^{10}}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{(\ln n)^{10}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(croissances comparées usuelles), donc $\dfrac{(\ln n)^{10}}{n^2} = o(1/n^{3/2})$, et par comparaison à une série à termes positifs convergente :

$$\boxed{\sum \frac{(\ln n)^{10}}{n^2} \text{ est convergente.}}$$

(c) Comme plus haut (mais dans l'autre sens) $\dfrac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{945}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^{1/2}}$ (ce qui ne permet pas de dire grand chose), mais si on coince γ entre $1/2$ et 1, alors $\dfrac{1}{n^\gamma}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{945}}$:

$$\frac{\frac{1}{n^{3/4}}}{\frac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{945}}} = \frac{(\ln n)^{945}}{n^{1/4}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $\dfrac{1}{n^{3/4}} = o\left(\dfrac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{945}}\right)$ donc par comparaison de séries à termes positifs (et par l'absurde comme plus haut) :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{945}} \text{ est divergente.}}$$

(d) On souhaite montrer :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2 k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}.$$

On va donc chercher à **majorer** le terme général (inutile d'encadrer à ce stade là).

L'application $x > 1 \mapsto \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ est (calculer la dérivée !) décroissante, donc on va pouvoir utiliser une comparaison somme/intégrale. Le petit dessin usuel (que je n'ai pas sous la main ; mais gare à vous si vous ne l'avez pas fait !) nous invite à choisir $k \geqslant 3$ (attention, pas 2 !). Pour $t \in [k-1, k]$, on a $\dfrac{1}{k\ln^2 k} \leqslant \dfrac{1}{t\ln^2 t}$, inégalité qu'on peut intégrer sur $[k-1,k]$ pour obtenir :

$$\frac{1}{k\ln^2 k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t\ln^2 t}.$$

Si on prend maintenant $n \geqslant 3$ et qu'on somme l'inégalité précédente pour k allant de 3 à n, on obtient :

$$S_n - \frac{1}{2\ln^2 2} \leqslant \int_2^n \frac{dt}{t\ln^2 t},$$

et c'est à cet instant qu'on comprend le sens de l'indicaiton mystérieuse en début d'énoncé : on va effectuer le changement de variable $u = \ln t$ pour trouver :

$$S_n \leqslant \frac{1}{2\ln^2 2} + \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \leqslant \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles est croissante ($S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{n\ln^2 n} \geqslant S_n$) et majorée par $\dfrac{1}{2\ln^2 2} + \dfrac{1}{\ln 2}$ donc convergente.

$$\boxed{\sum \frac{1}{n\ln^2 n} \text{ converge.}}$$

(e) Pour $\alpha \neq 1$, on adapte ce qui précède en coinçant à chaque fois γ entre 1 et α : que α soit plus grand ou plus petit que 1, $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$ constitue un bon candidat. C'est ainsi qu'on le fixe pour la suite.

— Si $\alpha > 1$, alors $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = o(1/n^\gamma)$ (évaluer le rapport et noter que $\gamma < \alpha$) et $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ est convergente, donc par comparaison gnagnagna, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est congergente.

— Si $\alpha > 1$, on a cette fois $\gamma > \alpha$, donc $\dfrac{1}{n^\gamma}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, or $\gamma < 1$, donc $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ est divergente, et il en va de même pour $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

— Supposons maintenant $\alpha = 1$.

— Si $\beta > 1$, alors comme dans le cas $\beta = 2$, on obtient par une comparaison somme/intégrale :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n \frac{1}{n\ln^\beta n} &\leqslant \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \int_2^n \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \frac{1}{\beta - 1}\left(\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln n)^{\beta-1}}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \frac{1}{(\beta-1)(\ln 2)^{\beta-1}}\end{aligned}$$

donc par croissance/majoration des sommes partielles, $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ est convergente.

— Si $\beta < 1$, on va cette fois minorer les sommes partielles (et je passe les détails) en se concentrant pour bien manipuler à nouveau des quantités positives telles que $1 - \beta$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{n\ln^\beta n} \geqslant \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \frac{1}{1-\beta}\left((\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

d'où la divergence de $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$

— Le cas $\beta = 1$ se traite de la même façon que le cas précédent, à un détail près : le calcul de l'intégrale fait apparaître la minoration :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{n\ln n} \geqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et on conclut de la même façon quant à la divergence de $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$.

Finalement :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).}$$

2. *Des estimations de convergences et divergences*

(a) On ne va plus se contenter d'une minoration des sommes partielles mais d'un encadrement de $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\sqrt{\ln k}}\cdot$ Les techniques précédentes nous fournissent :

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} + \int_2^n \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}}$$

c'est-à-dire :

$$2\sqrt{\ln(n+1)} - 2\sqrt{\ln 2} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} + 2\sqrt{\ln n} - 2\sqrt{\ln 2} \qquad (E)$$

Notons respectivement g_n et d_n minorants et majorants dans l'encadrement précédent. Il est clair que $d_n \sim 2\sqrt{\ln n}$. Pour le membre de gauche, ça l'est à peu près... mais on va tout de même le préciser (en ne s'occupant pas de la constante qui est négligeable devant le terme tendant vers $+\infty$) :

$$\sqrt{\ln(n+1)} = \sqrt{\ln n + \ln(1+1/n)} = \sqrt{\ln n}\sqrt{1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{\ln n}}} \sim \sqrt{\ln n}$$

Si maintenant on reprend (E) et qu'on divise chaque terme par le candidat équivalent $2\sqrt{\ln n}$ on trouve :

$$\frac{g_n}{2\sqrt{\ln n}} \leqslant \frac{S_n}{2\sqrt{\ln n}} \leqslant \frac{d_n}{2\sqrt{\ln n}},$$

et d'après ce qui précède les termes extérieurs tendent vers 1, donc les gendarmes nous assurent qu'il en va de même pour le terme central, et finalement :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}} \sim 2\sqrt{\ln n}}$$

(b) Si $\alpha \in]0,1[$, on reprend exactement la technique précédente pour trouver :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \sim \frac{(\ln n)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\cdot}$$

(c) Fixons deux entiers n et N tels que $3 \leqslant n \leqslant N$. On obtient alors par comparaison somme/intégrale :

$$\int_n^{N+1} \frac{dt}{t\ln^2 t} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{dt}{t\ln^2 t}$$

Le membre de gauche vaut $\dfrac{1}{\ln n} - \dfrac{1}{\ln(N+1)}$ et celui de droite vaut $\dfrac{1}{\ln(n-1)} - \dfrac{1}{\ln(N)}\cdot$ Lorsque N tend vers $+\infty$, les trois termes de l'encadrement possèdent une limite ; on peut donc passer ledit encadrement à la limite en N pour obtenir :

$$\frac{1}{\ln n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \frac{1}{\ln(n-1)}.$$

Les membres extérieurs de cet encadrement sont équivalents, donc en gendarmisant comme plus haut après division par l'équivalent-candidat, on trouve :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \sim \frac{1}{\ln n}\cdot}$$

(d) C'est bien entendu la même chose. Il faut juste avoir assez de forces/lucidité pour pouvoir manipuler le paramètre α On trouvera :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)(\ln n)^{\alpha-1}}\cdot}$$

(e) Encore une comparaison somme/intégrale pour obtenir un encadrement des sommes partielles ; on trouve finalement :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)} \sim \ln(\ln n).}$$