1 Une relation de récurrence du premier ordre

On va bien entendu étudier l'application

$$f : x \mapsto x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cdot$$

Tout d'abord, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\sin x \geqslant 1 - \dfrac{1}{2} > 0$, donc f est (strictement) croissante. Ensuite, le signe de $f(x) - x$ est celui de $\cos x + \dfrac{1}{2}\cdot$ On va s'intéresser aux points d'annulation (qui donneront les points fixes de f, utiles pour la suite) avant le signe :

$$f(x) - x = 0 \quad\iff\quad \cos x = -\frac{1}{2} \quad\iff\quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pm 2\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

et par ailleurs :

$$f(x) \geqslant x \quad\iff\quad \cos x \geqslant -\frac{1}{2} \quad\iff\quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in [-2\pi/3 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k\pi]$$

Sur $[-\pi, \pi]$ par exemple, $f(x) - x$ est nul en $-2\pi/3$ et $2\pi/3$, positif entre ces deux valeurs, et négatif au delà.
Ceci nous permet de représenter le graphe de f au voisinage de 0, et l'escalier usuel partant de $u_0 = 0$:

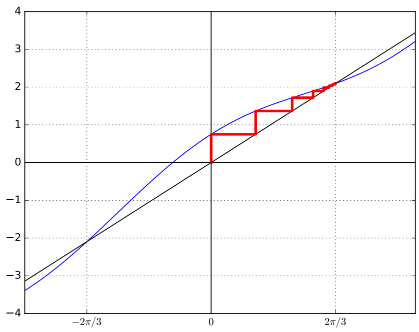

FIGURE 1 – L'escalier usuel

Nous voila convaincus que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2\pi}{3}\cdot$$

Déroulons les arguments usuels :

- Puisque f est **croissante**, $-2\pi/3 \leqslant x \leqslant 2\pi/3$ implique $-2\pi/3 = f(-2\pi/3) \leqslant f(x) \leqslant f(2\pi/3) = 2\pi/3$, autrement dit : $I = [-2\pi/3, 2\pi/3]$ est stable par f (et la continuité de f n'a rien à faire ici, sauf à vouloir prouver que $f(I) = I$ plutôt que $f(I) \subset I$, ce qui est inutile).
- Puisque u_0 appartient à l'intervalle I qui est stable par f, on a également $u_1 = f(u_0)$ qui appartient à I, et par récurrence immédiate, tous les u_n sont dans I (enfin... comme c'est la première fois, vous aurez rédigé cette récurrence).
- Pour $x \in I$, on a $f(x) \geqslant x$, donc d'après le point précédent, on a pour tout n : $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $2\pi/3$, donc est convergente ; notons ℓ sa limite.

— La **continuité** de f en ℓ nous assure que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Mais par ailleurs, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (suite extraite). La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ nous assure alors (unicité de la limite) : $\ell = f(\ell)$, donc ℓ est de la forme $\pm 2\pi/3 + 2k\pi$.

— L'inégalité $u_0 = 0 \leqslant u_n \leqslant 2\pi/3$ (celle de gauche venant de la croissance de u) passée à la limite nous assure : $0 \leqslant \ell \leqslant 2\pi/3$.

— Sur $[0, 2\pi/3]$, le seul réel point fixe de f est $2\pi/3$, qui est donc la limite de u.

Comme annoncé plus haut :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2\pi}{3}\cdot}$$

2 Un calcul de somme

1. Tout d'abord, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{1}{n^3}\cdot$ La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^3}$ est notoirement convergente $(3 > 1)$, donc par comparaisons de séries *à termes positifs* :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ est convergente.}}$$

   C'était probablement la dernière fois que vous utilisiez le théorème de comparaison à une série de Riemann.

2. Pour la décomposition en éléments simples, on commence par écrire la forme a priori :

$$F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}\cdot$$

   On évalue ensuite $XF = \dfrac{1}{(X+1)(X+2)} = a + b\dfrac{X}{X+1} + c\dfrac{X}{X+2}$ en 0 pour trouver d'une part a (à droite) et d'autre part $\frac{1}{2}$ (à gauche) ; etc.

$$\boxed{\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}\cdot}$$

3. Pour $N \geqslant 1$, on va collisionner :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N+2} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right),
\end{aligned}$$

   et on obtient en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}\cdot}$$

   Si vous avez collisionné avec des petits points, ça me va aussi, mais ce doit être sur une somme finie.