



Pour le lundi 19 septembre 2022

1 Un développement limité

Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que la série

$$\sum_{n \geq 2} (a \ln(n-1) + b \ln(n) + c \ln(n+1))$$

soit convergente.

2 Produits infinis

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels de $] -1, 1[$, et on note $p_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Si la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on désigne sa limite par $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$. Si de plus cette limite est non nulle, on dit que *le produit infini* $\prod (1 + u_n)$ converge.

1. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [0, 1[$. Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.
2. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in] -1, 0]$.
 - (a) Que peut-on dire de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ si $\sum u_n$ diverge ?
 - (b) Montrer que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement positif si et seulement si $\sum u_n$ converge.
3. Étudier la convergence et calculer la limite de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants :

$$(a) \quad u_n = -\frac{1}{(n+1)};$$

$$(b) \quad u_n = -\frac{1}{(n+1)^2};$$

$$(c) \quad u_n = -\frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

4. Dans cette question, on suppose seulement que la série $\sum u_n^2$ converge. Montrer que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite non nulle si et seulement si $\sum u_n$ converge.
5. Que dire de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ si la série $\sum u_n$ converge absolument ?
6. (a) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{\text{th}(t)}{\text{th}(t/2)} = 1 + \frac{1}{\text{ch}(t)}$.
 (b) Soit $x > 1$ et soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_1 = x$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} = 2v_n^2 - 1.$$

Montrer l'existence et calculer la valeur de $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{v_k}\right)$.

7. Soit $\theta \in]0, \pi/2[$. On pose $u_n = \tan^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer l'existence et calculer la valeur de $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$.