



Khôlles : quinzaine numéro 4

Du 14 au 25 novembre 2022

1 Première semaine

- Valeurs, vecteurs et sous-espaces propres ; endomorphismes diagonalisables (existence d'une base diagonalisante, ou E s'écrivant comme somme des sous-espaces propres). Extension aux matrices (mais le point de vue géométrique est toujours présent).
- Étude à la main de quelques cas comme les matrices triangulaires, et les endomorphismes ou matrices de rang 1.
- Liens entre la multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.
- Utilisation de polynômes annulateurs pour la réduction (attention, pas de polynôme minimal). Polynôme caractéristique.
- CN de diagonalisabilité : χ_u scindé. CS : χ_u scindé à racines simples. CNS : χ_u scindé, et les sous-espaces propres ont pour dimension la multiplicité de la valeur propre.
- CNS algébrique de diagonalisabilité : existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples (plus précisément : le produit des $X - \lambda$, pour λ décrivant le spectre).

2 Deuxième semaine

En plus :

- Trigonalisation (guidée).
- Applications : commutant, équations polynomiales, systèmes différentiels linéaires.
- Début des suites et séries de fonctions, avec la convergence simple et uniforme pour des suites de fonctions.

3 Questions de cours

- (S1) Un endomorphisme f vérifie $f \circ f = \text{Id}_E$ si et seulement s'il existe deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 tels que f est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .
- (S1) Les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.
- (S1+S2) Si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
- (S1+S2) Si P est un polynôme annulateur de u , alors $\text{Sp}(u) \subset \text{Rac}(P)$; avec égalité lorsque P est le polynôme caractéristique.
- (S2) En dimension n , si $u \in \mathcal{L}(E)$ possède n valeurs propres distinctes, alors $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.
- (S2) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres distinctes, alors l'équation $B^2 = A$ possède 2^{n-1} ou 2^n solutions.
- (S2) La convergence simple implique la convergence uniforme. Être capable de donner un contre-exemple pour la réciproque.

4 Coming next

Prochaine quinzaine : suites et séries de fonctions ; début des séries entières.