



Khôlles : quinzaine numéro 5

Du 28 novembre au 9 décembre 2022

1 Première semaine : réduction ; suites et séries de fonctions

- Réduction ; tout type d'exercice.
- Suites et séries de fonctions. Convergence simple et uniforme (quitte à localiser sur $[-A, A]$ ou $[\alpha, +\infty[$). Convergence normale, pour les séries. Les théorèmes de régularité sont énoncés et prouvés pour les *suites* de fonctions, et ré-énoncés et essentiellement utilisés dans le cadre des *séries* : continuité, \mathcal{C}^1 , intégration, et double limite (seulement pour les séries). Il a été chuchoté qu'en cas de localisation, la régularité passait des $[\alpha, \beta]$ à $]0, +\infty[$ (par exemple), mais qu'il n'en allait pas tout à fait de même pour les convergences uniformes/normales. Pour que $\sum f_n$ converge uniformément, il est nécessaire d'avoir $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Les grands théorèmes ont été mis en application sur la fonction ζ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

2 Deuxième semaine

- Suites et séries de fonctions (cf. première semaine).
- Séries entières : rayon de convergence (la borne supérieure de l'ensemble des $r \geq 0$ tels que $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée). Convergence absolue à l'intérieur du disque, divergence grossière à l'extérieur. L'étude sur le bord n'est pas un objectif du programme. Les séries primitives et dérivées ont le même rayon que la série initiale. La fonction somme est \mathcal{C}^∞ .

3 Questions de cours

- (S1) En dimension n , si $u \in \mathcal{L}(E)$ possède n valeurs propres distinctes, alors $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.
- (S1) Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.
- (S1+S2) La convergence normale implique la convergence uniforme.
- (S1+S2) Théorème de continuité pour une limite uniforme.
- (S1+S2) Intégration d'une limite uniforme sur un segment.
- (S2) Théorème de dérivabilité pour une limite de fonctions.
- (S2) Lemme d'Abel.
- (S2) Rayon de convergence de la série entière primitive/dérivée.

4 Coming next

Prochaine quinzaine : intégration.