



# Khôlles : quinzaine numéro 7

*Du 16 au 27 janvier 2023*

## 1 Première semaine : intégration, probabilités

- Interversions de symboles : convergence dominée, et intégration de somme de séries, sous la condition de convergence de  $\sum \int_I |f_n|$ . Intégrales à paramètres : continuité, caractère  $\mathcal{C}^1$  puis  $\mathcal{C}^k$  (on ne domine que la dernière) puis  $\mathcal{C}^\infty$  (on les domine toutes – au moins à partir d'un certain rang).
- Probabilités : rappels de première année, avec en particulier les probabilités composées, du conditionnement et Bayes. Passage au formalisme de deuxième année avec la dénombrabilité, la  $\sigma$ -additivité, la continuité (dé)croissante.
- Variables aléatoires : loi ; lois usuelles : Bernoulli, binomiale, et à partir du mardi 17 : géométrique et de Poisson.

## 2 Deuxième semaine : variables aléatoires

- Programme de la première semaine pour les probabilités.
- Variables aléatoires : généralités, lois usuelles (Bernoulli, binomiale, géométrique et de Poisson).
- Couples de lois. Lois conjointes et marginales. Indépendance. Somme de deux Poissons (ou binomiales) indépendantes. Coalitions : si  $Y = f(X_1, \dots, X_p)$  et  $Z = g(X_{p+1}, \dots, X_n)$  avec  $X_1, \dots, X_n$  mutuellement indépendantes, alors  $Y$  et  $Z$  sont indépendantes.
- Espérance : théorème du transfert. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes d'espérance finie, alors  $XY$  aussi, avec  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ . Inégalité de Markov.
- Variance : son existence est équivalente à l'absolue convergence de  $\sum x_n^2 \mathbb{P}(X = x_n)$ . Variance d'une somme de variables indépendantes, de  $aX + b$  ; inégalité de Bienaymé-Tchebychev (attention : la loi faible des grands nombres est dégradée au rang d'application de cette dernière) ; inégalité de Cauchy-Schwarz. Covariance.
- Fonctions génératrices : elles sont de rayon de convergence minoré par 1, définies et continues sur  $[0, 1]$ . Dérivable en 1 si et seulement si la variable a une espérance finie. Fonction génératrice d'une somme d'indépendantes.

## 3 Questions de cours

- (S1) Convergence des intégrales  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ .
- (S1) La fonction  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- (S1+S2) Théorème de continuité croissante (probabilité d'une réunion dénombrable croissante (ou non !) d'événements)
- (S1+S2) Bayes, probabilités composées.
- (S2) La somme de deux Poissons indépendantes est une Poisson.
- (S2) Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

## 4 Coming next

Prochaine quinzaine : espaces préhilbertiens réels.