Algèbre linéaire

1. Définitions :
   — Une famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre lorsque la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire triviale. Attention, les combinaisons linéaires sont des sommes FINIES, donc si $I = \mathbb{N}$ on parle bien de $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$ avec $n \in \mathbb{N}$ (n n'est pas borné a priori : $\mathbb{R}[X] \neq \mathbb{R}_n[X]$!).
   — $E_1, ..., E_k$ sont en somme directe lorsque tout vecteur $E_1 + \cdots + E_k$ se décompose de façon unique selon ces sous-espaces. Si $k = 2$ ça revient à dire que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.
   — E_1 et E_2 sont supplémentaires lorsque leur somme est directe et vaut E.
   — Lorsque $E = E_1 \oplus E_2$, la projection sur E_1 parallèlement à E_2 est l'application qui à tout $x \in E$ associe $x_1 \in E_1$, dans l'unique décomposition $x = x_1 + x_2$ selon $E_1 \oplus E_2$. Dans ce cadre, la symétrie par rapport à E_1 dans la direction E_2 est l'application qui à x associe $x_1 - x_2$. Le noyau de ces applications (plus ou moins l'identité) est alors bien connu... et on fait bien entendu un dessin.
   — Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux bases de E, la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ (dernière occasion de la connaître vraiment...) est la matrice dont les colonnes représentent les coordonnées des f_j dans leurs décompositions selon les e_i (écrire une matrice avec des machins dessus et à droite plutôt que de relire la phrase précédente en plissant les yeux).
   — Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image (qui doit donc être finie). Le rang d'une famille de vecteur est la dimension du sous-espace engendré par ces vecteurs. Celle d'une matrice est le rang de son application canoniquement associée.
   C'est aussi par théorème le rang de toute application linéaire qu'elle représente entre deux bases de tout espace. C'est aussi le rang de toute famille de vecteurs qu'elle représente dans toute base.
   — Si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \neq P^{(m)}(\alpha)$, on dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ de multiplicité m.
   — Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible lorsqu'il n'existe pas de décomposition $P = P_1P_2$ avec P_1 et P_2 non constants. Il est scindé lorsqu'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 (multiplié éventuellement par une constante !).

2. Théorèmes :
   — Une famille est libre (pas de CL nulle non triviale) si et seulement si elle est non liée (aucun vecteur n'est CL des autres).
   — Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie, alors ($\mathrm{Im}\,(u)$ est de dimension finie et) $\dim(\mathrm{Im}\,(u)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\,(u))$.
   — Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.
   — Toute famille libre peut être complétée en une base (pour compléter, on peut même choisir des vecteurs dans toute famille génératrice fixée à l'avance) ; de toute famille génératrice on peut extraire une base.
   — Principes de paresse :
     — Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de même dimension (finie !) alors il y a pour u équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.
     — Si E est de dimension finie égale à n, alors toute famille libre de n vecteurs de E est également génératrice (c'est donc une base). De même, toute famille génératrice de cardinal n est libre.
     — Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces de E (espace de dimension finie), avec $\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E)$, alors il y a équivalence entre : $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $E_1 + E_2 = E$.
     Et ces deux sous-espaces sont alors supplémentaires.
     — Si $E_1 \subset E_2$ avec E_1 et E_2 de même dimension (finie), alors $E_1 = E_2$.
   — Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $v \circ u = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$.

- Grassmann : si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces de E (de dimension finie), alors $\dim(E_1+E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$. *Et connaître le principe de la preuve est un plus...*
- Une somme de sous-espaces est directe si et seulement si la seule décomposition de 0 selon ces sous-espaces est la décomposition triviale.
- $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u \circ u = u$ (respectivement $u \circ u = \mathrm{Id}_E$) si et seulement si u est une projection (respectivement une symétrie).
- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrices M et M' dans deux bases $\mathcal{E}$ (« l'ancienne ») et $\mathcal{E}'$ (« la nouvelle ») et que P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$ (les vecteurs de la nouvelle base représentés dans l'ancienne) alors : $M' = P^{-1}MP$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Conséquence : si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$; ce qui permet de définir la trace d'un endomorphisme.
- « Pas trop au programme, mais bon... » Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a pour rang r, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$. *Idéalement : connaître deux preuves !*
- Relations coefficients-racines (somme et produit des racines d'un polynômes, comptées avec multiplicité) : savoir les retrouver. Avec les notations qu'on imagine : $x_1 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ et $x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}\cdot$
- Théorème d'interpolation de Lagrange : si $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$ sont distincts et $y_1, ..., y_n \in \mathbb{K}$, alors il existe un unique $L \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$. *Idéalement : savoir le prouver.*
- Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si chacun de ses éléments diagonaux est non nul.
- Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E et $f_1, ..., f_n \in F$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.
- Si $E = E_1 \oplus \cdots E_k$ et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $u|_{E_i} = u_i$.

3. Connaître/savoir faire aussi :
   - Théorème 1-2-3-4-5 : savoir écrire la matrice d'une application entre deux bases !
   - Montrer qu'une famille est libre (toujours le même début, et toujours la même fin).
   - Résoudre proprement et rapidement un système linéaire (en particulier, conclure correctement).
   - Calculer rapidement le rang d'une matrice.
   - Calculer le noyau d'une application linéaire (attention à bien distinguer vecteurs et coordonnées... « sauf si ça se passe dans $\mathbb{R}^n$ »).
   - Calculer le déterminant d'une matrice. Connaître celui des matrices de Vandermonde.
   - Si $u^k = 0$ et $u^{k-1}(x_0) \neq 0$, alors $\big(x_0, u(x_0), ..., u^{k-1}(x_0)\big)$ est libre. Conséquence si $k = \dim(E)$.
   - Savoir montrer que F est un sous-espace de E (noyau, Vect(...), ...).
   - Images et noyaux itérés. Rien au programme, mais retrouver rapidement les inclusions. *Idéalement, retenir et surtout savoir prouver que si à une étape il y a égalité, alors ensuite ça stagne.*
   - Calcul de A^n via un polynôme annulateur de A (et une division euclidienne).
   - Construire des bases adaptées à un endomorphisme de rang 1. Savoir montrer que dans ce cas, $u^2 = \mathrm{tr}(u)u$.
   - DES via $F = ... = ...$ (pas $F(X)$) puis $((X - \alpha)F)(\alpha) = ...$ d'une part et $= ...$ d'autre part.
   - Une matrice à diagonale dominante est inversible (pas au programme, mais savoir le montrer rapidement serait un plus).
   - Déterminants par blocs pour $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. *Idéalement : preuve ?*