



Khôlles : quinzaine numéro 8

Du 20 février au 3 mars 2023

Pour tout exercice (bienvenus!) sur une minimisation de distance aux habitants d'un sous-espace, la géométrisation sera plus ou moins (de complètement à pas du tout!), et un dessin sera absolument nécessaire.

1 Première semaine : variables aléatoires et préhilbertiens

- Variables aléatoires : généralités, lois usuelles (Bernoulli, binomiale, géométrique et de Poisson).
- Couples de lois. Lois conjointes et marginales. Indépendance. Somme de deux Poissons (ou binomiales) indépendantes. Coalitions : si $Y = f(X_1, \dots, X_p)$ et $Z = g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ avec $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes, alors Y et Z sont indépendantes.
- Espérance : théorème du transfert. Si X et Y sont indépendantes d'espérance finie, alors XY aussi, avec $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Inégalité de Markov.
- Variance : son existence est équivalente à l'absolue convergence de $\sum x_n^2 \mathbb{P}(X = x_n)$. Variance d'une somme de variables indépendantes, de $aX + b$; inégalité de Bienaymé-Tchebychev (attention : la loi faible des grands nombres est dégradée au rang d'application de cette dernière); inégalité de Cauchy-Schwarz. Covariance.
- Fonctions génératrices : elles sont de rayon de convergence minoré par 1, définies et continues sur $[0, 1]$. Dérivable en 1 si et seulement si la variable a une espérance finie. Fonction génératrice d'une somme d'indépendantes.
- Rappels de sup sur les préhilbertiens : définition d'un produit scalaire; Cauchy-Schwarz; polarisation. Orthogonal d'une partie.
- Existence de bases orthonormées en dimension finie (par récurrence, et par Gram-Schmidt).
- Matrice d'un produit scalaire; changement de base; matrices orthogonales; décomposition QR (en exercice).
- Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie (on a alors $E = F \oplus F^\perp$). Minimisation de la distance d'un vecteur à un sous-espace. Calculs effectifs.

2 Deuxième semaine : endomorphismes particuliers dans les préhilbertiens

En plus, sur les euclidiens :

- Dimension de l'orthogonal, dans un euclidien. Dualité dans les espaces euclidiens.
- Automorphismes orthogonaux; lien avec les matrices orthogonales.
- Habitants de $SO_2(\mathbb{R})$ puis $SO(E)$ puis $O(E)$ en dimension 2; composition. Habitants de $SO(E)$ en dimension 3.
- Réduction des endomorphismes symétriques en base orthonormée; orthoréduction des matrices symétriques réelles. Diverses applications (aucune explicitement au programme) telle que l'étude des extrémis de $\frac{\langle u(x)|x \rangle}{\|x\|^2}$.
- Attention, les symétriques (définis) positifs entrent au programme. Le fait essentiel à savoir prouver est l'équivalence entre le fait que $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ et le fait que $\langle u(x)|x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$ (et variantes strictes et matricielles).

3 Questions de cours

- (S1) La somme de deux Poissons indépendantes est une Poisson.
- (S1) Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- (S1+S2) Cauchy-Schwarz (dans les préhilbertiens), dont les cas d'égalité.
- (S1+S2) $X^\perp$ est un sous-espace ; $F \cap F^\perp = \{0\}$; $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$.
- (S1+S2) Existence de base orthonormée (en dimension finie) par récurrence ou par Gram-Schmidt (au choix du colleur).
- (S1+S2) Si F est un sous-espace de dimension finie de E et $x \in E$, alors lorsque f décrit F , $\|x - f\|$ possède un minimum, atteint en le projeté orthogonal de x sur F .
- (S2) Un endomorphisme d'un espace préhilbertien préserve la norme si et seulement s'il préserve le produit scalaire.
- (S2) Si $u \in \mathcal{S}_E$ a ses valeurs propres positives, alors il existe $v \in \mathcal{S}_E$ dont les valeurs propres sont positives et tel que $v^2 = u$.
- (S2) Si u est symétrique et possède pour valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ alors pour tout $x \in E$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x)|x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$.

4 Coming next

Prochaine quinzaine : équations différentielles linéaires.