



Khôlles : quinzaine numéro 9

Du 6 au 17 mars 2023

Pour les dernières semaines, les collés peuvent dire qu'ils ne souhaitent pas de question de cours : cela ne doit pas influencer la suite de la colle (ni la note). Ils doivent néanmoins évidemment connaître et savoir appliquer précisément les théorèmes !

1 Première semaine : symétries, isométries et ÉDL

- Endomorphismes autoadjoints : théorème spectral sans E à la fin (géométrique et matriciel). Endomorphismes et matrices symétriques (défini(e)s) positif(ve)s.
- Automorphismes orthogonaux ; lien avec les matrices orthogonales. Habitants de $SO_2(\mathbb{R})$ puis $SO(E)$ puis $O(E)$ en dimension 2. Habitants de $SO(E)$ en dimension 3. Identification précise des rotations en dimension 3, et construction de la matrice d'une rotation de caractéristiques données.
- Pour les équations différentielles linéaires, il y a les rappels du cours de première année (structure des espaces de solution – vectoriel ou affine – équations linéaires d'ordre 1, et d'ordre 2 à coefficients constants). La seule nouveauté est le théorème de Cauchy pour les équations scalaires d'ordre 2 à coefficients continus : $y'' = ay' + by + c$ possède une unique solution à conditions initiales en $y(t_0)$ et $y'(t_0)$ imposées (a, b et c sont continues sur un intervalle I).
- À partir du mardi 7 : problèmes de recollement. Et on peut aussi redonner des systèmes différentiels linéaires, histoire de faire un peu de réduction.

2 Deuxième semaine : ÉDL et espaces normés

- « Toutes » les équations différentielles linéaires.
- Espaces vectoriels normés : normes et distances, boules, ouverts, fermés. À la marge : intérieur et adhérence.
- Convergence des suites. Caractérisation séquentielle des fermés.
- Limite d'une fonction en un point adhérent, continuité. Propriétés opératoires.
- En dimension finie : toutes les normes sont équivalentes ; la convergence d'une suite est équivalente à la convergence des coordonnées ; la continuité d'une fonction est équivalente à la continuité de ses applications coordonnées ; une fonction continue définie sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes. les applications linéaires sont continues.

3 Questions de cours

- (S1) Un endomorphisme d'un espace préhilbertien préserve la norme si et seulement s'il préserve le produit scalaire.
- (S1) Si $u \in \mathcal{S}_E$ a ses valeurs propres positives, alors il existe $v \in \mathcal{S}_E$ dont les valeurs propres sont positives et tel que $v^2 = u$.
- (S1+S2) Méthode de la variation de la constante pour prouver que si a et b sont continues sur I , alors l'équation $y' = ay + b$ possède au moins une solution.
- (S2) Toute boule ouverte est ouverte! (*Et la version fermée*)
- (S2) Unicité de la limite d'une suite dans un espace vectoriel normé.

4 Coming next

Prochaine quinzaine : fin des espaces vectoriels normés, calcul différentiel dans \mathbb{R}^n .