Psi 999 – 2022/2023 ψ **Programme de khôlle**

Khôlles : quinzaine numéro 10

Du 20 au 31 mars 2023

Dernière quinzaine avant les écrits !
Petit rappel : la façon la plus simple de s'assurer qu'on ne fera pas 5/2, c'est de sécher les colles. À bon entendeur...

1 Première semaine : espaces vectoriels normés

Sur les espaces vectoriels normés, un objectif majeur est de savoir montrer qu'une partie est fermée/ouverte et/ou bornée.

- Espaces vectoriels normés : normes, boules, convexes, ouverts et fermés, intérieur. À la marge : intérieur et adhérence.
- Convergence des suites. Caractérisation séquentielle des fermés.
- Limite d'une fonction en un point adhérent, continuité. Propriétés opératoires.
- En dimension finie : toutes les normes sont équivalentes ; la convergence d'une suite est équivalente à la convergence des coordonnées ; la continuité d'une fonction est équivalente à la continuité de ses applications coordonnées ; une fonction continue définie sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes. les applications linéaires, bilinéaires, lipschitziennes sont continues.
- Les applications partielles d'une application continue sont continues, mais la réciproque est fausse.
- Dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

2 Deuxième semaine : espaces vectoriels normés et calcul différentiel

En plus : quelques rudiments de calcul différentiel. Il s'agit essentiellement de comprendre, faire et exploiter des développements limités...

- Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{R}^n$. Gradient si on arrive dans $\mathbb{R}$, différentielle. Propriétés opératoires.
- Composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Dérivées d'ordre 2 (et Schwarz). Hessienne.
- Extrémas locaux. Condition nécessaire non suffisante : le gradient s'annule. Condition suffisante non nécessaire : le gradient s'annule et la hessienne a toutes ses valeurs propres du même signe strict. Cas de la dimension 2 caractérisé par déterminant et trace.
- Une ou deux ÉDP auront peut-être été traitées (essentiellement : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$).

3 Questions de cours

- (S1) Unicité de la limite, pour une suite convergente d'un espace vectoriel normé.
- (S1) Si f est continue de E dans $\mathbb{R}$, alors $\{x \in E;\ f(x) > 0\}$ est un ouvert de E. Variantes.
- (S1+S2) $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (S1+S2) Révision : la formule de Taylor avec reste intégral ! (formule et preuve par récurrence).
- (S2) Condition nécessaire pour qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ possède un extremum en un point intérieur.