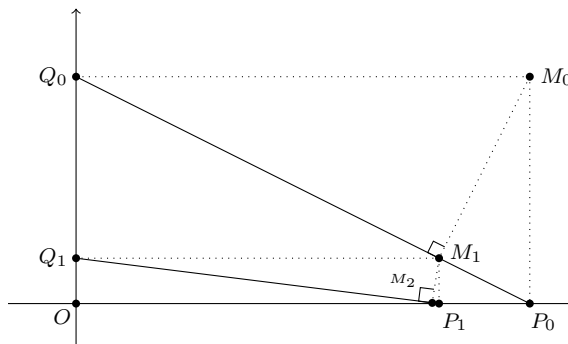


De la géométrie, des séries et du Python

1 On se lance

1. Pfiou... allez courage!



Il semblerait que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point de l'axe des abscisses.

Ou encore : $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 0$ et $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. La convergence semble même être très rapide (M_2 est très proche de P_1).

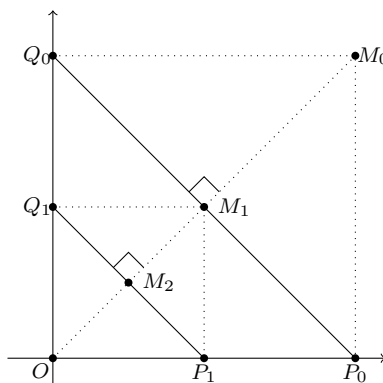
2. Si $x_0 > 0 = y_0$ alors (P_0, Q_0) est l'axe des abscisses, et donc $M_1 = M_0...$ et ainsi :

la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

3. Bien évidemment...

C'est la même chose !

4. Supposons : $x_0 = y_0 > 0$.



La droite (OM_0) est orthogonale à (P_0Q_0) , de sorte que le projeté orthogonal M_1 de M_0 sur (P_0Q_0) est le milieu du carré $(OP_0M_0Q_0)$: $M_1(x_0/2, y_0/2)$, puis par récurrence immédiate :

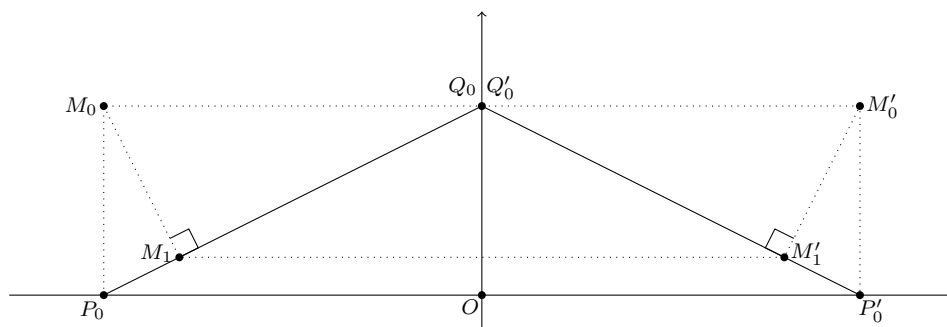
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n(x_0/2^n, y_0/2^n)$$

Et ainsi :

La suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'origine O

La vitesse de convergence est même géométrique (« en $(\frac{1}{2})^n$ »).

5. Notons $x'_0 = -x_0$, $y'_0 = y_0$, $(M'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(P'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Q'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites de points construites en partant de M'_0 . C'est cette suite de point qu'on imagine connue (« on sait traiter le cas où les deux composantes initiales sont strictement positives »), et il s'agit d'en déduire une construction de $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Or :
- M'_0 est le symétrique (implicitement dans la suite : *orthogonal par rapport à l'axe des ordonnées*) de M_0 ;
 - P'_0 est le symétrique de P_0 ;
 - Q'_0 est le symétrique de P_0 ;
- Le projeté orthogonal M'_1 de M'_0 sur $(P'_0Q'_0)$ est donc le symétrique du projeté orthogonal de M_0 sur (P_0Q_0) (à savoir M_1).



Ainsi, M'_1 est le symétrique de M_1 (et réciproquement), puis par récurrence immédiate :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est le symétrique de M'_n .

Et on a bien expliqué comment résoudre le cas (x_0, y_0) (construire les points M_n) à l'aide du cas $(-x_0, y_0)$ (les points M'_n). En particulier si $M'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} P$ alors $M_n = s(M'_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} s(P) = Q$, le symétrique de P par rapport à l'axe des ordonnées.

6. Le point $M_0(x_0, y_0)$ est le symétrique orthogonal de $M'_0(y_0, x_0)$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$. Comme dans la question précédente, on montrerait alors :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est le symétrique orthogonal de M'_n par rapport à Δ .

2 Le cas générique

1. Bien entendu,

le vecteur $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ dirige (PQ) ...

et pour trouver un vecteur orthogonal (et non nul),

il suffit de prendre $\vec{n} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

Ben oui : essayez de scalairiser $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ contre $\begin{pmatrix} 17 \\ 42 \end{pmatrix}$ et vous trouverez $-17x + 42y$, alors qu'on souhaitait trouver 0. Mais comment s'en sortir ?

Ceux qui n'ont pas réussi à traiter cette question confondent « trouver une solution simple » et « résoudre telle équation », ce qui est un problème... mais pas de panique : on va travailler cela !

2. Un point N appartient à (PQ) si et seulement si $\overrightarrow{PN}$ est orthogonal à $\vec{n}$. Si on note (X, Y) les coordonnées de ce point, cette équation devient $\begin{pmatrix} X - x \\ Y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = 0$, soit encore après simplifications :

$$yX + xY = xy.$$

Qui est donc l'(une) équation de (PQ) .

3. La question précédente nous assure que $yx' + xy' = xy$. Par ailleurs, $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{PQ}$ se traduit $-x(x' - x) + y(y' - y) = 0$, c'est-à-dire $-xx' + yy' = y^2 - x^2$.

Il reste à résoudre le système $\begin{cases} yx' + xy' = xy \\ -xx' + yy' = y^2 - x^2 \end{cases}$ ou bien (ce qui n'est pas la même chose) combiner ces deux équations, pour trouver comme demandé :

$$\begin{cases} x' = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{y^3}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

4. Puisque x_0 est non nul, il en va de même pour $x_1 = \frac{x_0^3}{x_0^2 + y_0^2}$, puis par récurrence (que je m'accorde

immédiate !) pour tous les x_n . Mais si on fixe $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n^3}{x_n^2 + y_n^2} \\ y_{n+1} = \frac{y_n^3}{x_n^2 + y_n^2} \end{cases}$ donc $\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} =$

$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)^3$, point clé de la récurrence qui suit.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $y_n = x_n \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{3^n}$ ».

— Bien entendu, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

— Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée, avec $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a alors :

$$y_{n+1} = x_{n+1} \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = x_{n+1} \left(\frac{y_n}{x_n}\right)^3 = x_{n+1} \left(\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{3^n}\right)^3 = x_{n+1} \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{3^{n+1}}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

Le principe de récurrence s'applique, et ainsi :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, y_n = x_n \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{3^n}$$

3 Une série

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $x_{n+1} = \frac{x_n^3}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{x_n^3}{x_n^2 + (x_n p^{3^n})^2}$, soit encore :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + p^{2 \cdot 3^n}}.$$

2. D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \ln(x_{k+1}) = \ln(x_k) - \ln(1 + p^{2 \cdot 3^k})$$

Si maintenant on fixe $n \in \mathbb{N}$ et qu'on applique la relation précédente pour k allant de 0 à $n-1$, on obtient par collisions (par exemple) :

$$\ln(x_n) = \ln(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + p^{2 \cdot 3^k})$$

3. Tout d'abord, $p \in]0, 1[$, donc $p^{2 \cdot 3^k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, et donc : $\ln(1 + p^{2 \cdot 3^k}) \sim p^{2 \cdot 3^k}$.

Ensuite, on doit pouvoir montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2 \cdot 3^k \geq k$, donc $0 \leq p^{2 \cdot 3^k} \leq p^k$; or $\sum p^k$ est une série (géométrique) convergente, donc $\sum p^{2 \cdot 3^k}$ est convergente. **Par comparaison de séries à termes positifs,**

$$\sum_k \ln(1 + p^{2 \cdot 3^k}) \text{ est convergente.}$$

Si on note S la somme de cette série, on a alors $\ln(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(x_0) - S$, puis par continuité de la fonction exponentielle : $x_n = \exp(\ln(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 e^{-S} > 0$. Enfin, puisque $y_n = x_n p^{3^n}$, on a également : $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 0, y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } (M_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un point de l'axe des abscisses.}$$

4. Supposons : $0 < x_0 < y_0$. On peut

- refaire l'étude précédente, mais plutôt en écrivant $x_n = y_n q^{3^n}$, avec $q = \frac{x_0}{y_0} \in]0, 1[$;
- ou bien utiliser la question 6 de la première partie (symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$).

Dans les deux cas, on peut conclure :

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 0 \text{ et } (M_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un point de l'axe des ordonnées.}$$

4 Un peu de Python

1. Comment écrire autre chose que ce qui suit ?

```
def projection(x, y):
    if x == 0 and y == 0:
        return (0, 0)
    else:
        return (x**3/(x**2+y**2), y**3/(x**2+y**2))
```

2. On va tenir à jour d'une part les listes des coordonnées calculées (`les_x` et `les_y`), et d'autre part les dernières calculées (`x` et `y`) :

```
def successifs(x0, y0, n):
    les_x, les_y = [x0], [y0]
    x, y = x0, y0
    for _ in range(n):
        x, y = projection(x, y)
        les_x.append(x)
        les_y.append(y)
    return les_x, les_y
```

Inutile de m'expliquer qu'on pouvait économiser deux variables : je le sais...

3. On va, pour chaque couple de conditions initiales, calculer les listes de coordonnées, puis les représenter :

```
for (x0, y0) in [(2., 2.), (2., 1.), (-2., 1.), (-1., -2.), (1., -2.), (2., -1.)]:
    lesx, lesy = successifs(x0, y0, 5)
    pyplot.plot(lesx, lesy, 'o-')
```

