Khôlles : quinzaine numéro 3

Du 16 octobre au 10 novembre 20323

Le cours, à défaut de reculer, n'a guère avancé...

1 Première semaine : algèbre linéaire

— Théorème (formule) du rang.
— Sommes directes de (plus de) deux sous-espaces. Lien avec le découpage des bases.
— Images et noyaux itérés.
— Hyperplans et formes linéaires (histoire de suivre le programme officiel, mais...).
— Calcul matriciel : changements de bases, réduction du rang, $PAQ = J_r$.
— Les matrices et endomorhismes de rang 1 ont fait l'objet d'une attention particulière.
— Quand une base est adaptée à l'image et/ou au noyau d'une application linéaire (ce qui n'est pas rare, surtout quand on la construit dans ce but...), la matrice de l'application dans cette base n'est pas quelconque !
— Déterminant (en pratique ; ne pas creuser la théorie !).

2 Deuxième semaine : fin de l'algèbre linéaire, réduction

— Polynômes : rappels de première année, interpolation, relations coefficients-racines (aucune à connaître ; toutes à savoir retrouver).
— (Re)découverte des projections et symétries.
— Valeurs, vecteurs et sous-espaces propres ; endomorphismes diagonalisables (existence d'une base diagonalisante, ou E s'écrivant comme somme des sous-espaces propres). Extension aux matrices (mais le point de vue géométrique est toujours présent).
— Étude à la main de quelques cas comme les matrices triangulaires, et les endomorphismes ou matrices de rang 1.

3 Questions de cours

— (S1) Formule du rang (aka « théorème du rang »).
— (S1) Un sous-espace H de E (supposé de dimension n) est le noyau d'une forme linéaire non nulle si et seulement s'il est de dimension $n-1$.
— (S1) Si M est de rang r, alors il existe P et Q inversibles telles que $PAQ = J_r$.
— (S1+S2) Si A est de rang 1, alors $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$.
— (S2) : théorème d'interpolation de Lagrange.
— (S2) Un endomorphisme f vérifie $f \circ f = f$ si et seulement s'il existe deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 tels que f est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
— (S2) Les sous-espaces propres sont en somme directe.
— (S2) Si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

4 Coming next

Prochaine quinzaine : suite et fin de la réduction ; début des séries de fonctions (?)