Psi 999 – 2023/2024 ψ **DS 1 – 4 heures**

$\zeta(2)$ vs $\zeta(3)$

Le 16 septembre 2023 – calculatrices autorisées

1 Un calcul classique

Pour $\alpha > 1$, on définit $\zeta(\alpha)$ la somme de la série de Riemann convergente :

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\cdot$$

Quelques valeurs de ζ sont connues et assez spéciales (en particulier sur les entiers pairs). On va établir ici la valeur « bien connue » de $\zeta(2)$. La première partie de ce gros exercice est essentiellement algébrique.

1.1 Racines d'un polynôme

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme

$$P_n = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$$

1. Calculer P_1 et P_2. Ces polynômes sont-ils irréductibles ?
2. Soit N un entier strictement positif. Donner l'ensemble des complexes vérifiant $z^N = 1$.
   On demande d'abord un énoncé clair ; puis une preuve de cet énoncé. Oui, celle du premier DM...

   Dans la suite, on fixe un entier $n \geqslant 1$.
3. Calculer $P_n(i)$.
4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
5. Soient $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $P_n(a) = 0$ si et seulement s'il existe $k \in [\![1, 2n]\!]$ tel que
   $$a\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} - 1\right) = i\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} + 1\right)$$
6. En déduire que P_n possède exactement $2n$ racines distinctes, et qu'elles sont réelles.
7. À l'aide du binôme de Newton, montrer l'existence de $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n = Q_n(X^2)$.
   Question bonus : montrer l'unicité de Q_n.
8. Expliciter Q_1 et Q_2, ainsi que leurs racines.
9. Déterminer les racines de Q_n.
10. Justifier :
    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}\cdot$$
    On note S_n cette somme dans la suite du problème.

1.2 Calcul de $\zeta(2)$

1. Avec une preuve succincte mais convaincante, rappeler pourquoi $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.
2. Illustrer graphiquement puis prouver :

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \qquad 0 \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \tan x.$$

3. En déduire un encadrement de $\frac{1}{x^2}$ pour $x \in]0, \pi/2[$ puis de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ à l'aide de S_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$).
4. Conclure en donnant la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2 Une accélération de convergence (Centrale PC 2009)

On accélère ici la convergence d'une série, pour calculer $\zeta(3) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ *à* ε *près, avec* $\varepsilon = 5.10^{-5}$.

1. (a) Soient $q, N \in \mathbb{N}$, avec $q \geqslant 2$ et $N \geqslant 1$. À l'aide d'une comparaison avec une intégrale (sur un segment), majorer soigneusement le reste :

$$R(N, q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}.$$

   (b) Déterminer un entier N tel que $R(N, 3) \leqslant \varepsilon$.
2. On pose dorénavant, pour $p, n \in \mathbb{N}^*$: $u(n, p) = \dfrac{1}{n(n+1)...(n+p)}$.
   (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u(n, p)$ est convergente.

   On note $\sigma(p)$ *la somme de la série :* $\sigma(p) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u(n, p)$.

   (b) Calculer $\sigma(1)$.
   (c) Pour $p \geqslant 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $u(n, p-1) - u(n+1, p-1)$ en fonction de p et $u(n, p)$.
   (d) En déduire la valeur de $\sigma(p)$ pour $p \geqslant 2$.
3. (a) Montrer par récurrence l'existence de trois suites $(a_p)_{p \geqslant 2}$, $(b_p)_{p \geqslant 2}$ et $(c_p)_{p \geqslant 2}$ d'entiers naturels telles que pour tout réel x strictement positif et tout entier $p \geqslant 2$ on ait :

$$\frac{1}{x^3} = \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)...(x+p)} + \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)...(x+k)}.$$

   On explicitera en particulier les valeurs de a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} en fonction de celles de a_p, b_p, c_p et p.

   (b) Montrer que pour tout $p \geqslant 2$: $b_p \geqslant c_p \geqslant 0$.
   (c) Donner un programme (une fonction) Python permettant de calculer les a_p, b_p et c_p.
   (d) Calculer a_p, b_p et c_p pour $2 \leqslant p \leqslant 4$.
   (e) Expliciter, pour $p \geqslant 2$, la valeur de c_p ; puis celle de b_p à l'aide d'une somme. En déduire un équivalent simple de b_p lorsque p tend vers $+\infty$.
4. (a) Donner un majorant simple de

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)...(n+4)}$$

   et montrer, à l'aide de tout ce qui précède (et d'une calculatrice !), comment calculer $\zeta(3)$ pour la même valeur de ε avec une valeur de N moins grande que celle trouvée question 1b.

   (b) En utilisant ce qui précède, donner (à l'aide de la calculatrice) une valeur décimale approchée (par défaut) à ε près.