$\zeta(2)$ vs $\zeta(3)$

1 Un calcul classique

1.1 Racines d'un polynôme

1. En suivant la définition et en développant avec le binôme de Newton, on note qu'un terme sur 2 est éliminé (ce sera repris à la question 7 de façon systématique) :

$$\boxed{P_1 = 3X^2 - 1 \text{ et } P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1}$$

Déjà, $P_1 = 3(X^2 - 1/3) = 3(X - 1/\sqrt{3})(X + 1/\sqrt{3})$, donc P_1 n'est pas irréductible. Comme polynôme de degré > 2, P_2 ne saurait être irréductible (même si vous ne *voyez* pas de racine : $(X^2+1)(X^2+2)$ n'a pas de racine réelle mais est irréductible).

$$\boxed{\text{Ni } P_1 \text{ ni } P_2 \text{ n'est irréductible.}}$$

Si on veut factoriser P_2 en produit d'irréductibles, on peut écrire $P_2 = Q(X^2)$ avec $Q = 5X^2 - 10X + 1 = 5(X-\alpha)(X-\beta)$, puis $P_2 = 5(X^2-\alpha)(X^2-\beta) = \dots$

2. En français : les complexes vérifiant $z^N = 1$ sont exactement ceux qui s'écrivent sous la forme $z = \mathrm{e}^{2ik\pi/N}$ pour un certain $k \in [\![0, N-1]\!]$. Ou encore :

$$z^N = 1 \iff \exists k \in [\![0, N-1]\!];\ z = \mathrm{e}^{2ik\pi/N}$$

ou encore :

$$\boxed{\{z \in \mathbb{C};\ z^N = 1\} = \left\{\mathrm{e}^{2ik\pi/N} \mid k \in [\![0, N-1]\!]\right\}}$$

Tant que vous n'avez pas compris que ces trois assertions disent exactement la même chose, vous passez probablement à coté de quelque chose, et il est important de travailler cela maintenant : il en va de votre alphabétisation, cruciale pour le reste de l'année !

Passons maintenant à la preuve : il y a deux choses à faire (relisez chacune des trois assertions : elles disent toutes deux choses). Il n'est pas question de les faire en même temps.

- De façon quasi évidente on obtient une implication/inclusion : si z s'écrit $\mathrm{e}^{2ik\pi/N}$ pour un certain entier k, alors $z^N = \mathrm{e}^{2ik\pi} = 1$ ($\mathrm{e}^{i\theta}$ ça vous parle ? Sur un dessin ?).
- Réciproquement, supposons que $z^N = 1$. Il existe alors $\rho \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ (ben oui : ça vous parle le module et l'argument d'un complexe ? Oubliez tous les théorèmes que vous n'avez jamais su, et faites un dessin !). On a alors $z^N = \rho^N\mathrm{e}^{Ni\theta} = 1$. En observant le module de ces complexes on obtient $\rho^N = 1$, donc $\rho = 1$ (oui : il existe un unique réel positif qui, mis à la puissance N vaut 1. Ce n'est pas un théorème mystérieux : observez le graphe de $t \mapsto t^N$ sur $[0, +\infty[...)$. Il vient alors $\mathrm{e}^{Ni\theta} = 1$. Mais si on a compris ce que représente $\mathrm{e}^{i\varphi}$ on sait que pour que ce complexe soit égale à 1 il faut que φ soit de la forme $2k\pi$ pour un certain entier k. Ainsi, $\theta = 2k\pi/N$. L'encadrement $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ nous assure que $0 \leqslant k < N$ puis que $0 \leqslant k \leqslant N-1$ car k est un entier.

On aura évité les petites blagues à base de « $\mathrm{e}^{Ni\theta} = \mathrm{e}^{2ik\pi}$ donc $N\theta = 2k\pi$ » bien entendu...

Très sérieusement, relisez et comprenez cette preuve : elle est caractéristique de ce qui est attendu cette année : des choses assez naturelles et raisonnables, exposées de façon claire.

3. Sans génie excessif :

$$\boxed{P_n(i) = (2i)^{2n} = (-4)^n : i \text{ n'est pas racine de } P.}$$

4. Les sigma c'est difficile donc on peut développer sous la forme : « premier terme plus deuxième terme plus gnagnagna plus dernier terme » (et si on vous a dit que ce n'était pas rigoureux, on vous a un peu menti).

$$P_n = \frac{1}{2i}\left((X^{2n+1} + (2n+1)iX^{2n} + \cdots) - (X^{2n+1} - (2n+1)iX^{2n} + \cdots)\right) = (2n+1)X^{2n} + \cdots$$

$$\boxed{P_n \text{ est de degré } 2n \text{ et coefficient dominant } 2n+1.}$$

Sérieusement, ce n'est pas le calcul avec des sigma qui va vous faire comprendre le calcul ! Évidemment j'aimerais que vous soyez capables de formaliser le calcul précédent avec des sigma, mais ce n'est PAS la priorité.

5. On vient de noter que i n'était pas racine. On fixe donc a différent de i, et on va résoudre $P_n(a) = 0$:

$$P_n(a) = 0 \Longleftrightarrow (a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1} \Longleftrightarrow \left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1$$

Cette dernière relation est équivalente à l'existence de $k \in [\![0, 2n]\!]$ tel que $\dfrac{a+i}{a-i} = \mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)}$.

Maintenant, SI ON FIXE $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note que l'équation (E_k) $\dfrac{a+i}{a-i} = \mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)}$ est équivalente à $a + i = (a-i)\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)}$ donc (développer, et regrouper à droite ce qui concerne a) à $a\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} - 1\right) = i\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} + 1\right)$.

Puisqu'on a fini par bien comprendre ce premier exo de l'année concernant les équations de la forme $\alpha x = \beta$, on s'intéresse au coefficient devant a : il est nul si et seulement si $\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} = 1$, c'est-à-dire $k = 0$ (ben oui : on a noté que $2k\pi/(2n+1) \in [0, 2\pi[$).

Ainsi, l'équation (E_k) possède une unique solution pour $k \neq 0$ et aucune pour $k = 0$ (le second membre est différent de 0). On vient donc de prouver SANS ARNAQUE le résultat demandé !

$$\boxed{P_n(a) = 0 \text{ si et seulement s'il existe } k \in [\![1, 2n]\!] \text{ tel que } a\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} - 1\right) = i\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} + 1\right)}$$

En fait le résultat resterait vrai si on énonçait $k \in [\![0, 2n]\!]$, mais il faudrait alors distinguer le cas $k = 0$ dans la suite.

6. Comme vu précédemment, l'équation (E_k) possède une unique solution, qu'on simplifie par passage à l'angle moitié :

$$i\frac{\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} + 1}{\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} - 1} = i\frac{\mathrm{e}^{ik\pi/(2n+1)}\left(\mathrm{e}^{ik\pi/(2n+1)} + \mathrm{e}^{-ik\pi/(2n+1)}\right)}{\mathrm{e}^{ik\pi/(2n+1)}\left(\mathrm{e}^{ik\pi/(2n+1)} - \mathrm{e}^{-ik\pi/(2n+1)}\right)} = i\frac{2\cos(k\pi/(2n+1))}{2i\sin(k\pi/(2n+1))}$$

(on a noté que le dénominateur ne s'annule pas puisque c'est le sinus d'un angle de $]0, \pi/2[$, et il en va de même pour le numérateur). On voit alors apparaître l'inverse d'une tangente, ce qui est bien un réel.

On note aussi qu'il s'agit de tangentes de $2n$ angles distincts de $]0, \pi/2[$, donc ces tangentes sont (non nulles et) distinctes par injectivité de la fonction tangente sur cet intervalle. On a donc exhibé $2n$ racines réelles distinctes pour ce polynôme de degré $2n$, donc en plus d'avoir toutes les racines (c'était acquis par la résolution), on sait que ces racines sont simples.

$$\boxed{P_n \text{ possède } 2n \text{ racines distinctes qui sont les réels } x_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant 2n.}$$

7. On va formaliser ici le calcul initié aux questions 1 et 4. On note tout d'abord que dans le binôme de Newton on peut choisir quel terme est mis à la puissance k et quel autre à la puissance $n-k$ (enfin ici : $2n+1-k$), et on va privilégier la puissance simple sur le terme contenant (-1), ce qui va faciliter les choses une fois les deux sommes réunies, puisque $1 - (-1)^k$ vaut 0 si k est pair, et 2 sinon. Ensuite, il s'agira de décrire les entiers impairs entre 0 et $2n+1$: ils s'écrivent $2j+1$,

avec j décrivant $[\![1,n]\!]$. On note enfin que $i^{2j+1}=i(-1)^j$.
Ouala, c'est parti :

$$
\begin{aligned}
P_n &= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}i^k\underbrace{(1-(-1))^k}_{=0 \text{ si } k \text{ est pair}}X^{2n+1-k}\\
&= \frac{1}{2i}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}i^{2j+1}2X^{2n+1-(2j+1)}=\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}(-1)^jX^{2(n-j)}
\end{aligned}
$$

Il semble alors raisonnable de définir $Q_n=\sum\limits_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}(-1)^jX^{n-j}$, de sorte que : $P_n=Q_n(X^2)$.

Pour l'unicité, on suppose (comme toujours dans ce genre de circonstances) qu'il existe deux solutions Q_n et R_n. On a alors les **polynômes** $Q_n(X^2)$ et $R_n(X^2)$ qui sont égaux. En considérant (comme toujours) la différence $\Delta=Q_n-R_n$, on obtient alors $\Delta(X^2)=0$ (on parle encore de polynômes). Au choix, on peut alors écrire Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ ou bien noter que le polynôme Δ possède une infinité de racines (tous les réels positifs). D'une façon ou d'une autre, on obtient la nullité de Δ, et l'unicité de la réponse au problème posé.

$$\boxed{\text{Il existe un unique } Q_n\in\mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } P_n=Q_n(X^2)}$$

Pour la suite, on peut noter que Q_n est de degré exactement n ; ses premiers termes sont plus précisément ($j=0$ et $j=1$..) :

$$Q_n=(2n+1)X^n-\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}X^{n-1}+\cdots$$

8. $Q_1=3X-1$ possède $1/3$ comme (unique) racine, et $Q_2=5X^2-10X+1$ (reprendre la première question du sujet !) en possède deux, qui sont $1\pm 2/\sqrt{5}$.
9. Déjà, Q_n et de degré n donc possède au plus n racines distinctes. Par ailleurs, $Q_n(t^2)=P_n(t)$ pour tout réel t, donc : si t est racine de P_n, alors t^2 est racine de Q_n (cette phrase, essentielle, doit être bien comprise). Les $2n$ racines de P_n nous fournissent donc... combien de racines pour Q_n ? En fait, puisque $\tan(\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$ et $\dfrac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}=\pi-\dfrac{k\pi}{2n+1}$, les $2n$ racines de P_n vérifient :

$$0<x_1=-x_{2n}<x_2=-x_{2n-2}<\cdots<x_n=-x_{n+1}$$

de sorte que $x_1^2,x_2^2,\dots,\ x_n^2$ sont n réels distincts qui sont racines de Q_n : le compte est bon !

$$\boxed{Q_n \text{ possède } n \text{ racines distinctes, qui sont les } \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \text{ pour } k \text{ décrivant } [\![1,n]\!]}$$

Attention : on n'a pas résolu *directement $Q_n(t^2)=0$: on a trouvé n racines distinctes, et on a pu affirmer qu'il n'y en avait pas d'autres.*

10. On sait ou en retrouve que les racines (comptées avec multiplicité) de $p_nX^n+p_{n-1}X^{n-1}+\cdots+p_0$ ont leur somme qui vaut $-\dfrac{p_{n-1}}{p_n}$ (rappel : la preuve consiste à appliquer le principe du poulpe après factorisation). Grâce à la question précédente et à la remarque à la fin de la question 7 on obtient le résultat souhaité :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\frac{n(2n-1)}{3}.}$$

1.2 Calcul de $\zeta(2)$

1. On définit pour $n \geqslant 1$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, et par définition la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est équivalente à la convergence de la suite (S_n). Or :
   - d'une part (S_n) est croissante, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} > S_n$;
   - d'autre part la majoration $\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$ (qu'on voit sur un dessin fait sur la copie bien entendu, et qu'on prouve par intégration d'une inégalité) sommée pour k allant de 2 à n permet (après ajout du terme manquant et Chaslisation) de prouver :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

   Ainsi, (S_n) est croissante et majorée (par la *constante* 2) donc converge, ce qui par définition nous assure que :

   $$\boxed{\sum \frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$$

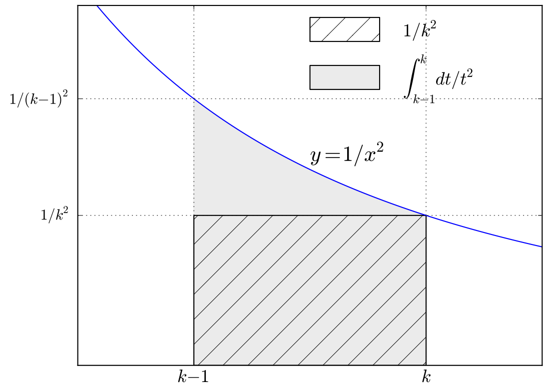


FIGURE 1 – Toujours le même dessin, qu'il faut *vraiment* comprendre.

2. Normalement, vous connaissez suffisamment bien les fonctions tangente et sinus pour avoir leur allure au voisinage de 0, avec en particulier leurs positions relatives par rapport à leur tangente en l'origine, qui est la droite d'équation $y = x$: ces positions relatives nous disent exactement les inégalités qu'on nous demande de prouver :

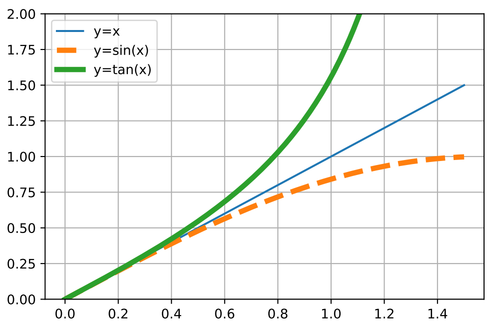


FIGURE 2 – À connaître mieux que $\tan(a-b)$.

Sérieusement si ce dessin vous laisse perplexe, alors par pitié oubliez 15 des 20 formules trigonométriques durement apprises, et observez puis retenez ce dessin.

L'inégalité $0 \leqslant \sin x$ est une propriété peu nouvelle de la fonction sin sur $[0, \pi/2[$. Les deux autres inégalités sont essentiellement issues d'une notion hors programme : la convexité. « la courbe est tournée vers le haut/le bas » ou encore « elle est située dessous/dessus ses tangentes ». Mais bon, ces notions n'étant pas au programme, on peut montrer les deux inégalités par études de fonctions.
Par exemple pour la dernière on considère l'application $\delta : x \mapsto \tan x - x$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2[$ et sa dérivée $\delta'(x) = \tan^2 x$ est à valeurs positives, donc δ est croissante, donc $\delta(x) \geqslant \delta(0) =$ pour tout $x \in [0, \pi/2[$.
Même chose concernant le sinus.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0, \pi/2[, \text{ on a } 0 \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \tan x.}$$

Un tableau de variation de δ est le bienvenu, mais pitié, je ne veux plus de « d'après le tableau de variation » : il s'agit bien d'un argument de CROISSANCE puis de comparaison de $\delta(x)$ à $\delta(0)$. Si vous trouvez ça évident, ça ne vous coûte pas grand chose de l'écrire. Et si vous n'aviez pas réalisé qu'il y avait un vrai argument de maths, alors il n'est pas trop tard pour cesser de pipeauter ! Dans les deux cas, écrivez l'argument.

3. Pour $x \in]0, \pi/2[$, on dispose de trois termes **strictement** positifs qu'on a ordonné : leurs inverses sont ordonnés également ; et comme il s'agit de réels positifs, ces inégalités passent au carré (bien entendu vous savez bien qu'en général pour deux réels a et b tels que $a < b$, on n'a pas forcément $a^2 < b^2$. Bien entendu...).

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0, \pi/2[, \text{ on a } 0 < \frac{1}{\tan^2 x} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2 x}\cdot}$$

Pour aller plus loin on applique, pour $k \in [\![1, n]\!]$, l'encadrement précédent à $x = \dfrac{k\pi}{2n+1}$ (qui est bien un réel strictement compris entre 0 et $\frac{(n+1/2)\pi}{2n+1} = \pi/2$) :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{1}{\tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\cdot$$

On note ensuite que pour $\theta \in]0, \pi/2[$ on a $\dfrac{1}{\sin^2 \theta} = \dfrac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \dfrac{1}{\tan^2 \theta} + 1$, et ainsi :

$$\boxed{\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, \text{ alors } \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}(S_n + n)}$$

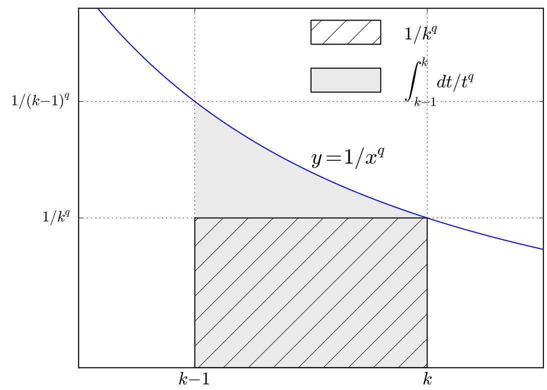
4. La première partie du sujet a permis d'établir que $S_n \sim \dfrac{2n^2}{3}$, donc dans l'encadrement précédent, les deux termes extremaux (sont équivalents à puis) convergent l'un et l'autre vers $\dfrac{2\pi^2}{3 \times 4} = \dfrac{\pi^2}{6}\cdot$
Le théorème des gendarmes s'applique et nous assure que le terme central converge vers cette même valeur lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot}$$

Le théorème des gendarmes nous donne la convergence. Puisqu'elle était acquise avant, on aurait pu se contenter de passer des inégalités à la limite.

2 Une accélération de convergence (Centrale PC 2009)

1. (a) On note bien entendu qu'il est ici question du reste d'une série de Riemann convergente, puisque $q \geqslant 2$. Pour travailler comme demandé sur un segment, on commence par fixer $M > N$.
Soit $k \in [\![N+1, M]\!]$. On a pour tout $t \in [k-1, k]$: $\dfrac{1}{k^q} \leqslant \dfrac{1}{t^q}\cdot$ En intégrant cette inégalité entre fonctions continues sur le segment $[k-1, k]$, on obtient : $\dfrac{1}{k^q} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^q}\cdot$



En sommant ces inégalités pour k décrivant $[\![N+1, M]\!]$, on obtient :

$$\sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k^q} \leqslant \int_N^M \frac{dt}{t^q} = \frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{N^{q-1}} - \frac{1}{M^{q-1}}\right).$$

Lorsque M tend vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers $R(N,q)$ alors que celui de droite tend vers $\dfrac{1}{(q-1)N^{q-1}}\cdot$ On peut alors passer l'inégalité précédente à la limite [1], on obtient :

$$\boxed{R(N,q) \leqslant \frac{1}{(q-1)N^{q-1}}\cdot}$$

(b) Pour avoir $R(N,3) \leqslant \varepsilon$, il **SUFFIT** [2] d'avoir $\dfrac{1}{2N^2} \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $N \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$, donc ici :

$$\boxed{\text{Il suffit de prendre } N = 100.}$$

2. (a) On a par exemple [3] : $u(n,p) \sim \dfrac{1}{n^{p+1}}$, donc par comparaison à une série convergente (de Riemann, avec ici $p+1>1$) *positive* :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} u(n,p) \text{ est convergente.}}$$

(b) On calcule $\sigma(1)$ par télescopages sur les sommes partielles. Soit donc $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N} u(k,1) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}\cdot$$

Le membre de droite tend vers 1 et celui de gauche vers la somme de la série. Par unicité de la limite :

$$\boxed{\sigma(1) = 1.}$$

(c) Une délicate mise au dénominateur commun nous donne directement :

$$u(n,p-1) - u(n+1,p-1) = \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)\ldots(n+p-1)(n+p)} = \frac{(n+p)-n}{n(n+1)\ldots(n+p)},$$

soit encore :

$$\boxed{u(n,p-1) - u(n+1,p-1) = pu(n,p).}$$

(d) La relation précédente nous invite à écrire, pour $p \geqslant 2$ et N entier supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{aligned} p\sum_{n=1}^{N} u(n,p) &= \sum_{n=1}^{N} \left(u(n,p-1) - u(n+1,p-1)\right) = u(1,p-1) - u(N+1,p-1) \\ &= \frac{1}{p!} - \frac{1}{(N+1)(N+2)\ldots(N+p)}. \end{aligned}$$

1. Bien vérifier les convergences *avant* de passer l'inégalité à la limite, merci...
2. Radar automatique : les yeux du correcteur vont immédiatement aller voir ce que vous aurez écrit ici...
3. Penser au fait que p est fixé ; prendre $p = 3$ si ça peut aider.

Le membre de droite tend vers $\dfrac{1}{p!}$ lorsque N tend vers $+\infty$, alors que celui de gauche tend vers $p.\sigma(p)$. Ainsi :

$$\boxed{\sigma(p) = \frac{1}{p.p!}\cdot}$$

3. (a) Au rang 2, la relation demandée [4] est :

$$\frac{1}{x^3} = \frac{b_2x + c_2}{x^3(x+1)(x+2)} + \frac{a_2}{x(x+1)(x+2)},$$

c'est-à-dire :

$$(x+1)(x+2) = a_2x^2 + b_2x + c_2.$$

Pour que cette relation soit vérifiée pour tout $x > 0$, il SUFFIT [5] donc de prendre $a_2 = 1$, $b_2 = 3$ et $c_2 = 2$.
Supposons maintenant avoir trouvé, à $p \geqslant 2$ fixé, les a_k, b_k et c_k pour $k \leqslant p$, tels que :

$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{x^3} = \frac{b_px + c_p}{x^3(x+1)(x+2)...(x+p)} + \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)...(x+k)}.$$

On cherche à avoir, pour tout $x > 0$:

$$\frac{b_px + c_p}{x^3(x+1)...(x+p)} = \frac{b_{p+1}x + c_{p+1}}{x^3(x+1)...(x+p)(x+p+1)} + \frac{a_{p+1}}{x(x+1)...(x+p+1)},$$

soit encore

$$\forall x > 0, \qquad (b_px + c_p)(x+p+1) = a_{p+1}x^2 + b_{p+1}x + c_{p+1}.$$

Il suffit pour cela de définir $a_{p+1} = b_p$, $b_{p+1} = c_p + (p+1)b_p$ et enfin $c_{p+1} = (p+1)c_p$.

$$\boxed{\text{L'existence des suites } (a_p)_{p\geqslant 2},\ (b_p)_{p\geqslant 2} \text{ et } (c_p)_{p\geqslant 2} \text{ est établie, avec } \begin{cases} a_{p+1} = b_p \\ b_{p+1} = c_p + (p+1)b_b \\ c_{p+1} = (p+1)c_p \end{cases}}$$

Une rédaction soigneuse de la récurrence n'est ici pas si simple qu'il n'y parait. En particulier, la proposition « Il existe a_p, b_p, c_p tels que... » n'a pas de sens (qui sont $a_2, ..., a_{p-1}$?), et «Il existe des coefficients a_k ($k \leqslant p$) , b_p et c_p tels que...» se prouve effectivement par récurrence, mais ceci n'établit pas exactement le résultat demandé (les a_k de cette récurrence dépendent a priori de p, alors qu'ils ne doivent pas. C'est subtil, mais c'est ainsi).
Il y a alors deux façons de s'en sortir. La première (usuelle) consiste à rédiger comme plus haut la « construction par récurrence » : on donne les premiers termes, puis on raconte comment passer d'une étape à la suivante. La question de l'unicité (implicite quand on demande des formules comme c'est ici le cas) est alors pudiquement laissée sous le tapis.
La deuxième consiste à énoncer soigneusement la propriété, puis réparer ce qui coince. Ici, on prouverait pour tout $p \geqslant 2$ la propriété « Il existe des coefficients $a_k^{(p)}$ ($k \leqslant p$) , b_p et c_p tels que... ». Ensuite, on prouve l'unicité de ces coefficients (à p fixé, et PAS par récurrence !). Enfin, l'unicité et les valeurs suffisantes trouvées dans la récurrence nous assurent que les $a_k^{(p)}$ ne dépendent en fait pas de p : c'est gagné !

(b) On montrerait par récurrence immédiate (valeur de c_2 et relation de récurrence) que pour tout $p \geqslant 2$, $c_p = p!$ Puisque $b_2 \geqslant c_2$ et $b_{p+1} \geqslant (p+1)b_p$, la proposition « $b_p \geqslant p!$ » se prouve alors par récurrence à nouveau immédiate.

$$\boxed{\text{Pour tout } p \geqslant 2,\ b_p \geqslant c_p \geqslant 0.}$$

(c) D'après les questions précédentes, il suffit d'écrire :

4. Attention, on ne SUPPOSE surtout pas cette relation vérifiée, sans quoi c'est fichu, pour la prouver !
5. Et ceux qui auront prétendu (plus ou moins implicitement, par exemple via un « donc $b_{p+1} =$... ») qu'il FAUT prendre de telles valeurs, auront probablement soigneusement justifié cette affirmation *inutile*, avant de passer à *la question qui était posée*, à savoir l'existence...

```
def abc(p):
    if p == 2:
        return 1, 3, 2
    a, b, c = abc(p-1)
    return b, c+p*b, p*c # attention à p vs. p+1 !
```

(d) Demandons à Python

```
>>> for i in range(2, 5):
...     print abc(i)
...
(1, 3, 2)
(3, 11, 6)
(11, 50, 24)
```

$$\boxed{\text{Les premières valeurs de } (a_p, b_p, c_p)\text{... sont écrites juste en dessus !}}$$

(e) On a déjà vu : $c_p = p!$ La relation de récurrence pour les b_p, finement divisée par $(p+1)!$ fournit alors : $\dfrac{b_{p+1}}{(p+1)!} = \dfrac{b_p}{p!} + \dfrac{1}{p+1}$, et donc : $\dfrac{b_p}{p!} = \dfrac{b_2}{2!} + \displaystyle\sum_{k=3}^{p} \frac{1}{k}$, soit encore (puisque $b_2 = 3$) : $b_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$, et on reconnaît les sommes partielles de la série harmonique, dont un équivalent simple a déjà été rencontré une ou deux fois.

$$\boxed{\text{Pour } p \geqslant 2,\ c_p = p! \text{ et } b_p = p! \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{p} \sim p! \ln(p).}$$

4. (a) La minoration brutale $(n+1)...(n+4) \geqslant n^4$ fournit $\dfrac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)...(n+4)} \leqslant \dfrac{50}{n^6} + \dfrac{24}{n^7}\cdot$ Les trois termes de la relation précédentes sont les termes généraux de séries convergentes, ce qui autorise à passer cette inégalité aux restes (on somme de N à M, puis on passe l'inégalité à la limite en M) :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)...(n+4)} \leqslant 50R(N,6) + 24R(N,5) \leqslant \frac{10}{N^5} + \frac{4}{N^6} \leqslant \frac{14}{N^5}\cdot$$

Recollons maintenant les morceaux. Dans la relation

$$\frac{1}{n^3} = \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)...(n+4)} + \sum_{k=2}^{4} \frac{a_k}{n(n+1)...(n+4)},$$

on ne trouve que des termes de séries convergentes, de sorte que les sommes des séries associées sont égales, avec :

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)...(n+4)} + \sum_{k=2}^{4} a_k \sigma(k).$$

On a alors

$$\left| \zeta(3) - \left(\sigma(2) + 3\sigma(3) + 11\sigma(4) + \sum_{k=1}^{N} \frac{50k+24}{k^3(k+1)...(k+4)} \right) \right| = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{50k+24}{k^3(k+1)...(k+4)}.$$

Pour avoir l'approximation souhaitée, il suffit donc de majorer le membre de droite par ε, ce qui sera vérifié dès que $\dfrac{14}{N^5} \leqslant \varepsilon$. Il suffit donc de prendre $N \geqslant \left(\dfrac{14}{5} 10^5\right)^{1/5} \simeq 12,29$.

$$\boxed{\left| \zeta(3) - \left(\sigma(2) + 3\sigma(3) + 11\sigma(4) + \sum_{k=1}^{13} \frac{50k+24}{k^3(k+1)...(k+4)} \right) \right| \leqslant 5.10^{-5}}$$

(b) Yapluka :

```
import fractions as fr
from math import factorial

def sigma(p):
    return fr.Fraction(1, p*factorial(p))

approx = sigma(2) + 3*sigma(3) + 11*sigma(4) +\
        sum(fr.Fraction(50*k+24,k**3*(k+1)*(k+2)*(k+3)*(k+4))\
                for k in range(1, 14))

>>> approx
Fraction(956266583969985193, 795533836249152000)
>>> float(approx)
1.2020438860007125
```

Pour information, on a l'approximation :

$$\zeta(3) \simeq 1.202056903$$

(au sens : à 10^{-10} près)

Et pour comparer :

```
>>> approx2 = sum(fr.Fraction(1, k**3) for k in range(1, 101))
>>> approx2
Fraction(81473483330743503583074181861672511931518122336172216406894149391331
289704097519580221863303145356050828007873151451209887,
67781182783092495848656345091844021571734190630914590229332161379950257170828
098031102950264769178652556660142954086400000)
>>> float(approx2)
1.2020074006596777
```