Psi 999 – 2023/2024 ψ **DS 2 – 4 heures**

Le 7 octobre 2023 – calculatrices autorisées

La première partie sera travaillée en premier. Vous rendez votre copie après au moins 30 minutes et au plus une heure ; vous obtiendrez alors la suite de l'énoncé.

1 Un peu comme si j'y tenais

1. Énoncer puis démontrer un énoncé décrivant les solutions de l'équation $z^n = 1$, où n est un entier strictement positif fixé.
2. Montrer que $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.
3. Établir soigneusement un équivalent simple de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ lorsque n tend vers l'infini.
4. On suppose que $u \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F deux espace vectoriels. On suppose de plus que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille libre de E et que u est injective.
   Montrer que $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une famille libre de F.
5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E un espace vectoriel de dimension finie n. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel $u^N = 0$. Montrer : $u^n = 0$.

2 Un mini-exercice (bien moins de 5 minutes)

Montrer que $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ est convergente, puis que $n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3 Commutant de $\mathcal{L}(E)$ (40 minutes)

On s'intéresse ici à l'ensemble des endomorphismes d'un espace donné commutant avec tous les autres endomorphismes.

1. Le cas $n = 2$.
   (a) On définit les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   Calculer les produits MN, NM, MP, PM, NP et PN.
   (b) Expliciter deux matrices A et B telles que $AB \neq BA$.
   (c) Montrer que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ commute avec toutes les autres matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ (i.e. $AB = BA$) si et seulement si A est de la forme λI_2.
   (d) Soit E un espace de dimension 2. Déterminer *avec soin*[1] l'ensemble des endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$.
2. On repasse en dimension n quelconque : déterminer les matrices commutant avec toutes les autres, puis les endomorphismes commutant avec tous les autres.
   Pour information : en dimension infinie, les endomorphismes commutant avec tous les autres sont bien ceux que vous pouvez imaginer.

4 Autour des séries de Bertrand (1H45)

Peut-être qu'en cours de route, un changement de variable $u = \ln x$ pourra être intéressant...

1. *Convergences et divergences*
   (a) Justifier simplement le fait que $\sum \dfrac{1}{n^2 \ln^3 n}$ est convergente et $\sum \dfrac{\ln^5 n}{\sqrt{n}}$ est divergente.
   (b) Montrer que la série de terme général $\sum \dfrac{(\ln n)^{10}}{n^2}$ est convergente (on pourra comparer $\dfrac{(\ln n)^{10}}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^{3/2}}$).
   (c) Que dire de la série $\sum \dfrac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}}$? (On pourra comparer le terme général à $\frac{1}{n^{3/4}}$)
   (d) À l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que $\sum \dfrac{1}{n \ln^2 n}$ converge.
   (e) Montrer que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou bien : ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
2. *Des estimations de sommes partielles et restes*
   (a) Établir un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}.$$
   On commencera par faire un dessin conduisant (pour des valeurs de k à préciser) à un encadrement de $\dfrac{1}{k\sqrt{\ln k}}$ par deux intégrales ; encadrement qu'on prouvera. Ensuite on sommera, etc...
   (b) Même chose avec $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(\ln k)^\alpha}$, avec $\alpha \in]0,1[$.

1. Genre : sans parler d'une base qui n'aurait pas été introduite...

(c) Établir un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

Ici, on passera par un encadrement de $\sum\limits_{k=n}^{N}$*, encadrement qu'on exploitera avec soin...*

(d) Même chose avec $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k(\ln k)^\alpha}$, avec $\alpha > 1$.

(e) Donner finalement un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

5 Formule d'inversion de Pascal (45 minutes)

On va montrer ici que deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \beta_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k$$

si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \beta_k.$$

Dans les deux premières questions et seulement elles, n est fixé et Φ désigne l'application définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, par :

$$\forall P \in E, \qquad \Phi(P) = P(X+1)$$

(attention, P DE $X+1$, pas P FOIS $X+1$).

1. Montrer que Φ est un automorphisme (application linéaires bijective d'un espace dans lui-même) de E en exhibant $\Psi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_E$.
   On explicitera, pour $P \in E$, la valeur de $\Psi(P)$.
2. Déterminer les matrices A et B de Φ et Ψ dans la base canonique de E. Que dire de ces deux matrices (l'une vis-à-vis de l'autre) ?
3. On suppose ici :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \beta_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k$$

   Traduire ces relations matriciellement (à n fixé, écrire les relations aux rangs $0, 1, ..., n$), et en déduire :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \beta_k.$$

4. Prouver la réciproque.