1 Un peu comme si j'y tenais

1. **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va montrer :** $\{z \in \mathbb{C}\,;\; z^n = 1\} = \{\mathrm{e}^{2ik\pi/n} \,|\, k \in [\![0, n-1]\!]\}$

   Notons E_1 l'ensemble de gauche et E_2 celui de droite.
   - L'inclusion $E_2 \subset E_1$ est une simple vérification : si $z \in E_2$ alors il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $z = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, et on a alors $z^n = \mathrm{e}^{2ik\pi} = 1$, donc $z \in E_1$.
   - Réciproquement : si $z \in E_1$, on l'écrit $z = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ (en cherchant la preuve au brouillon vous avez probablement écrit $\theta \in \mathbb{R}$ dans un premier temps, avant de réaliser en fin de preuve que pour localiser k, il était pratique de localiser θ dans l'intervalle suffisant $[0, 2\pi[$...).
     On a $\rho^n \mathrm{e}^{ni\theta} = 1$, donc en observant le module on a $\rho^n = 1$, ce qui impose (puisque ρ est un réel positif) : $\rho = 1$. On obtient ensuite $\mathrm{e}^{ni\theta} = 1$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2k\pi$.
     Bien entendu personne n'aura écrit un charabia à base de $\mathrm{e}^{ni\theta} = \mathrm{e}^{2ik\pi}$ pour tout k donc... donc quoi ? Donc $n\theta = 2k\pi$ bien entendu ! Ce qu'on utilise c'est le fait que les seuls réels φ vérifiant $\mathrm{e}^{i\varphi} = 1$ sont ceux de la forme $2k\pi$ avec k entier.
     Bref, $z = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, et il reste à localiser k, ce qu'on obtient facilement grâce à l'encadrement $0 \leqslant \theta < 2\pi$ qui fournit $0 \leqslant k < n$ et permet de conclure puisque k est entier.

2. On définit pour $n \geqslant 1$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$, de sorte que par définition la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est équivalente à la convergence de la suite (S_n). Or :
   - d'une part (S_n) est croissante, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{(n+1)^2} > S_n$;
   - d'autre part la **majoration** $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{dt}{t^2}$ (qu'on voit sur un dessin fait sur la copie bien entendu, et qu'on prouve par intégration d'une inégalité) sommée pour k allant de 2 à n permet (après ajout du terme manquant et Chaslisation) de prouver :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

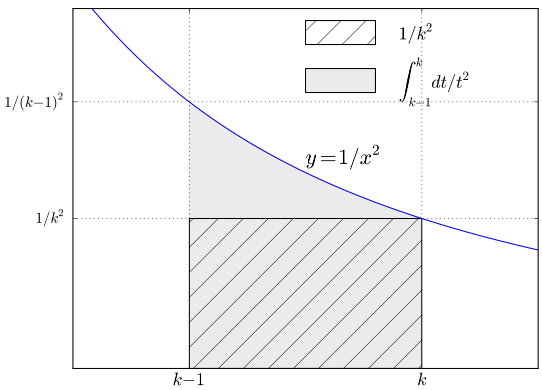

FIGURE 1 – Toujours le même dessin...

Ainsi, (S_n) est croissante et majorée (par la **constante** 2) donc converge, ce qui par définition nous assure que :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$$

Pour la divergence de $\sum \frac{1}{n}$ On va cette fois **minorer** $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$ par quelque chose qui tend vers $+\infty$ (et NON, pas par quelque chose qui diverge simplement !). Pour cela on refait le dessin usuel, mais avec le rectangle entre k et $k+1$: pour tout $k \geqslant 1$, $f(k) = \frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} f(t)dt$ puis $S'_n \geqslant \int_1^{n+1} f(t)dt = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de sorte que $S'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n} \text{ diverge.}}$$

3. On commence par **encadrer**, pour $1 \leqslant n$ et $N \geqslant n+1$ la somme partielle $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{3/2}}$ par des intégrales, avec la comparaison et le dessin qu'on imagine (enfin... qu'on fait quand même sur la copie !) :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall N \geqslant n+1 \qquad \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^{3/2}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \int_n^N \frac{dt}{t^{3/2}}.$$

On calcule ensuite les deux membres extérieurs, en se souvenant qu'on ne cherche pas une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ (ça fait mal à la tête) mais on cherche plutôt à écrire un truc de la forme $(...)' = t^{-3/2}$. On constate alors que dans l'encadrement précédent les trois termes possèdent une limite lorsque N tend vers $+\infty$ (limites différentes, accessoirement ; on n'évoquera certainement pas les gendarmes à cet instant). On peut donc passer les deux inégalités à la limite pour obtenir :

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

On note alors que le membre de gauche et celui de droite (!) sont équivalents à $\frac{2}{\sqrt{n}}$, de sorte qu'en divisant tout ce beau monde par cette chose, on peut gendarmiser pour obtenir :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \sim \frac{2}{\sqrt{n}}.}$$

4. On se place sous les hypothèses de l'énoncé, et on part (bien entendu...) d'une combinaison linéaire nulle de la famille dont on veut montrer la liberté :

$$\lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_n u(e_n) = 0,$$

et on souhaite montrer que les λ_k sont nuls. Une géniale intuition nous invite à utiliser la linéarité de u pour écrire :

$$u\left(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n\right) = 0.$$

On a donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in \operatorname{Ker}(u)$, or u est injective, donc son noyau est réduit à $\{0\}$, donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, et la liberté de $(e_1, ..., e_n)$ nous assure alors que tous les λ_k sont nuls, ce qu'on souhaitait montrer.

$$\boxed{(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n)) \text{ est une famille libre de } F.}$$

5. Sous les hypothèses de l'énoncé, on prend r **le plus petit** entier strictement positif tel que $u^r = 0$ (et un tel entier existe puisque $u^N = 0$). On est alors assuré de l'existence d'un $x_0 \in E$ tel que $u^{r-1}(x_0) \neq 0$. On montre ensuite de façon classique (voir par exemple le corrigé du dernier DM...) que $\left(x_0, u(x_0), ..., u^{r-1}(x_0)\right)$ est libre. Puisque cette famille est de cardinal r, on en déduit que $r \leqslant n = \dim(E)$. Il reste à écrire : $u^n = u^{n-r} \circ u^r = 0$.

$$\boxed{u^n = 0}$$

2 Un mini-exercice

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\cdot$ La série $\sum u_n$ est clairement alternée, et $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en décroissant, donc d'après le « théorème spécial sur les séries alternées » – TSSA :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Mais de plus, on sait que le reste de la série a sa valeur absolue majorée par celle de son premier terme : $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)}{k^2+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc :

$$\boxed{n\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)}{k^2+1} = O(1/n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

3 Commutant de $\mathcal{L}(E)$

1. Comment ne pas traiter correctement les deux premières questions ?
   (a) Sans grand génie :

   $$MN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad MP = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad PM = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad NP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \quad PN = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Il me semble qu'en prenant $A = M$ et $B = N$ on obtient un exemple, non ?
   Ceux ayant utilisé P auront certainement fourni une infinité de contre-exemples, dont au moins un faux, et n'auront donc pas répondu correctement à la question. Vous êtes furieux ? C'est bien, vous allez finir par comprendre que fournir un contre-exemple qui marche, c'est mieux qu'en fournir deux, voire une infinité, voire une infinité dont un faux...

   (c) Si A est de la forme λI_2, alors A commute évidemment avec toutes les autres matrices.
   Réciproquement, supposons que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec toutes les autres matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On a en particulier $AM - MA = 0$ donc $\begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $a = d$ et $c = 0$.
   De même, $AN = NA$ fournira (à nouveau) $a = d$ mais surtout $b = 0$. Ainsi, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2$.

   $$\boxed{\text{Les matrices commutant avec toutes les autres sont exactement celles de la forme } \lambda I_2.}$$

   (d) Bien entendu si u est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$, alors u commute avec tout $v \in \mathcal{L}(E)$, puisqu'on a alors $u \circ v = \lambda v = v \circ u$.
   Réciproquement, supposons que $u \in \mathcal{L}(E)$ commute avec tous les autres endomorphismes de E, fixons une base de E (pitié, pas canonique : ça n'a pas de sens !). Notons $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ la matrice de u dans cette base. Si B est une autre matrice $(2, 2)$, alors elle représente un endomorphisme v dans la base qu'on s'est fixée. Mais zalors la relation $u \circ v = v \circ u$ nous donne $AB = BA$. Ainsi, A commute avec toutes les matrices (oui : on avait fixé B quelconque, et c'est fondamental : ça ne marcherait pas si B arrive comme matrice d'un endomorphisme v qu'on aurait fixé au début...), donc est de la forme λI_2 d'après la question précédente... donc u est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$.

   $$\boxed{\text{Les endomorphismes commutant avec tous les autres sont exactement les homothéties } x \mapsto \lambda x.}$$

2. Bien entendu, les matrices de la forme λI_n commutent avec toutes les autres. Réciproquement, soit A une matrice telle que $AB = BA$ pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors en particulier $AE_{1,2} = E_{1,2}A$ (avec $E_{1,2}$ ce que vous imaginez), ce qui fournit après calcul avec vos petits doigts (ne comptez pas sur moi pour le typographier : vous devez poser ce calcul une fois dans votre vie avec vos propres doigts et votre propre cerveau) : $a_{1,1} = a_{2,2}$, $a_{2,j} = 0$ pour tout $j \neq 2$ et $a_{i,1}$ pour tout $i \neq 1$.

Si on rejoue à ça avec $E_{1,3}$, etc... on comprend que la matrice A a tous ses coefficients en dehors de la diagonale qui sont nuls... et tous les coefficients diagonaux égaux : elle est bien de la forme λI_n !

$$\boxed{\text{Les matrices commutant avec toutes les autres sont exactement celles de la forme } \lambda I_n.}$$

Le passage des matrices aux endomorphismes se fait exactement comme en dimension 2, en commençant par fixer une base de l'espace.

$$\boxed{\text{Les endomorphismes commutant avec tous les autres sont exactement les homothéties } x \mapsto \lambda x.}$$

4 Autour des séries de Bertrand

1. (a) Il suffit de noter que $\dfrac{1}{n^2 \ln^3 n} = o(1/n^2)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = o(\ln^5 n/\sqrt{n})$ puis d'invoquer la comparaison **entre des séries à termes positifs** :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^2 \ln^3 n} \text{ est convergente et } \sum \frac{\ln^5 n}{\sqrt{n}} \text{ est divergente.}}$$

Le deuxième cas est peut-être moins clair puisqu'il s'obtient, en cas de doute, en raisonnant par l'absurde : si $\sum \dfrac{\ln^5 n}{\sqrt{n}}$ *était convergente, alors* $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *le serait aussi...*

(b) Le terme général $\dfrac{(\ln n)^{10}}{n^2}$ est certes « plus gros que $\dfrac{1}{n^2}$ », terme général d'une série convergente (ce n'est donc pas dans le bon sens), mais il est négligeable devant tout terme de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha}$ coincé entre $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n}\cdot$ Plus précisément :

$$\frac{\frac{(\ln n)^{10}}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{(\ln n)^{10}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(croissances comparées usuelles), donc $\dfrac{(\ln n)^{10}}{n^2} = o(1/n^{3/2})$, et par comparaison **à une série à termes positifs** convergente :

$$\boxed{\sum \frac{(\ln n)^{10}}{n^2} \text{ est convergente.}}$$

(c) Comme plus haut (mais dans l'autre sens) $\dfrac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^{1/2}}$ (ce qui ne permet pas de dire grand chose), mais si on coince γ entre $1/2$ et 1, alors $\dfrac{1}{n^\gamma}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}}$:

$$\frac{\frac{1}{n^{3/4}}}{\frac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}}} = \frac{(\ln n)^{999}}{n^{1/4}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $\dfrac{1}{n^{3/4}} = o\left(\dfrac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}}\right)$ or $\sum \dfrac{1}{n^{3/4}}$ diverge, donc par comparaison de séries à termes positifs (et par l'absurde comme plus haut) :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}} \text{ est divergente.}}$$

(d) On souhaite montrer :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln^2 k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}.$$

On va donc chercher à **majorer** le terme général (inutile d'encadrer à ce stade là).

L'application $x > 1 \mapsto \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ est (calculer la dérivée !) décroissante, donc on va pouvoir utiliser une comparaison somme/intégrale. Le petit dessin usuel (que je n'ai pas sous la main ; mais gare à vous si vous ne l'avez pas fait !) nous invite à choisir $k \geqslant 3$ (attention, pas 2 !). Pour $t \in [k-1, k]$, on a $\dfrac{1}{k\ln^2 k} \leqslant \dfrac{1}{t\ln^2 t}$, inégalité qu'on peut intégrer sur $[k-1, k]$ pour obtenir :

$$\frac{1}{k\ln^2 k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t\ln^2 t}.$$

Si on prend maintenant $n \geqslant 3$ et qu'on somme l'inégalité précédente pour k allant de 3 à n, on obtient :

$$S_n - \frac{1}{2\ln^2 2} \leqslant \int_2^n \frac{dt}{t\ln^2 t},$$

et c'est à cet instant qu'on comprend le sens de l'indication mystérieuse en début d'énoncé : on va effectuer le changement de variable $u = \ln t$ pour trouver :

$$S_n \leqslant \frac{1}{2\ln^2 2} + \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \leqslant \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}.$$

Ainsi, la **suite** des sommes partielles est croissante ($S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{n\ln^2 n} \geqslant S_n$) et majorée par $\dfrac{1}{2\ln^2 2} + \dfrac{1}{\ln 2}$ donc convergente.

$$\boxed{\sum \frac{1}{n\ln^2 n} \text{ converge.}}$$

Plutôt que le changement de variable, on pouvait aussi observer le motif $\dfrac{u'}{u^2} = (\ldots)'$.

(e) Pour $\alpha \neq 1$, on adapte ce qui précède en coinçant à chaque fois γ entre 1 et α : que α soit plus grand ou plus petit que 1, $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$ constitue un bon candidat (on a bien entendu fait deux dessins...). C'est ainsi qu'on le fixe pour la suite.

— Si $\alpha > 1$, alors $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = o(1/n^\gamma)$ (évaluer le rapport et noter que $\gamma < \alpha$) et $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ est convergente, donc par comparaison gnagnagna, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ est convergente.

— Si $\alpha > 1$, on a cette fois $\gamma > \alpha$, donc $\dfrac{1}{n^\gamma}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, or $\gamma < 1$, donc $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ est divergente, et il en va de même pour $\sum \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$.

— Supposons maintenant $\alpha = 1$.

  — Si $\beta > 1$, alors comme dans le cas $\beta = 2$, on obtient par une comparaison somme/intégrale :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n\ln^\beta n} &\leqslant \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \int_2^n \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln n)^{\beta-1}}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \frac{1}{(\beta-1)(\ln 2)^{\beta-1}} \end{aligned}$$

  donc par croissance/majoration de la suite des sommes partielles, $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ est convergente.

  — Si $\beta < 1$, on va cette fois **minorer** les sommes partielles (et je passe les détails) en se concentrant pour bien manipuler à nouveau des quantités positives telles que $1-\beta$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n\ln^\beta n} \geqslant \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \frac{1}{1-\beta}\left((\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  d'où la divergence de $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$.

— Le cas $\beta = 1$ se traite de la même façon que le cas précédent, à un détail près : le calcul de l'intégrale fait apparaître la minoration :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n \ln n} \geqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et on conclut de la même façon quant à la divergence de $\sum \frac{1}{n \ln n}$.

Finalement :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).}$$

2. (a) On ne va plus se contenter d'une **minoration** des sommes partielles mais d'un **encadrement** de $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$. Les techniques précédentes nous fournissent :

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} + \int_2^n \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}}$$

c'est-à-dire :

$$2\sqrt{\ln(n+1)} - 2\sqrt{\ln 2} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} + 2\sqrt{\ln n} - 2\sqrt{\ln 2} \qquad (E)$$

Notons respectivement g_n et d_n le minorant et le majorant dans l'encadrement précédent. Il est clair que $d_n \sim 2\sqrt{\ln n}$. Pour le membre de gauche, ça l'est à peu près... mais on va tout de même le préciser (en ne s'occupant pas de la constante qui est négligeable devant le terme tendant vers $+\infty$) :

$$\sqrt{\ln(n+1)} = \sqrt{\ln n + \ln(1+1/n)} = \sqrt{\ln n}\sqrt{1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{\ln n}}} \sim \sqrt{\ln n}.$$

Si maintenant on reprend (E) et qu'on divise chaque terme par le candidat équivalent $2\sqrt{\ln n}$ on trouve :

$$\frac{g_n}{2\sqrt{\ln n}} \leqslant \frac{S_n}{2\sqrt{\ln n}} \leqslant \frac{d_n}{2\sqrt{\ln n}},$$

et d'après ce qui précède les termes extérieurs tendent vers 1, donc les gendarmes nous assurent qu'il en va de même pour le terme central, et finalement :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}} \sim 2\sqrt{\ln n}}$$

(b) Si $\alpha \in]0,1[$, on reprend exactement la technique précédente pour trouver :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \sim \frac{(\ln n)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.}$$

On vérifie bien entendu la cohérence de cette formule avec le cas $\alpha = 1/2$...

(c) Fixons deux entiers n et N tels que $3 \leqslant n \leqslant N$. On obtient alors par comparaison somme/intégrale :

$$\int_n^{N+1} \frac{dt}{t \ln^2 t} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{dt}{t \ln^2 t}.$$

Le membre de gauche vaut $\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(N+1)}$ et celui de droite vaut $\frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln(N)}$. Lorsque N tend vers $+\infty$, les trois termes de l'encadrement possèdent une limite ; on peut donc passer ledit encadrement à la limite en N pour obtenir :

$$\frac{1}{\ln n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \frac{1}{\ln(n-1)}.$$

Les membres extérieurs de cet encadrement sont équivalents, donc en gendarmisant comme plus haut après division par le candidat équivalent, on trouve :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \sim \frac{1}{\ln n}.}$$

(d) C'est bien entendu la même chose. Il faut juste avoir assez de forces/lucidité pour pouvoir manipuler le paramètre α On trouvera :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)(\ln n)^{\alpha-1}}.}$$

On vérifie bien entendu la cohérence de cette formule avec le cas $\alpha = 2$.

(e) Encore une comparaison somme/intégrale pour obtenir un encadrement des sommes partielles ; on trouve finalement :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)} \sim \ln(\ln n).}$$

5 Formule d'inversion de Pascal

1. Le caractère linéaire de Φ est clair... mais à signaler. Ensuite, si on note $\Psi : P \mapsto P(X-1)$, on a alors clairement Ψ linéaire, avec $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_E$, et ainsi :

$$\boxed{\Phi \text{ est un automorphisme de } E}$$

2. Les matrices recherchées sont dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, et on trouve en position (i,j) le coefficient de X^{i-1} dans la décomposition (dans la base canonique $\mathcal{E}$ de E) de $\Phi(X^{j-1})$ (respectivement $\Psi(X^{j-1})$), qui est donné par la formule du binôme :

$$(X+1)^{j-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{j-1}{k} X^k \qquad \text{et} \qquad (X-1)^{j-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{j-1}{k} (-1)^{j-1-k} X^k$$

$$\boxed{A = \mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{E}) = \left(\left(\binom{j-1}{i-1} \right) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \quad \text{et } B = \mathrm{Mat}(\Psi, \mathcal{E}) = \left((-1)^{j-i} \left(\binom{j-1}{i-1} \right) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}}$$

Il s'agit bien entendu de matrices triangulaires supérieures, les coefficients binomiaux étant nuls pour une bonne partie d'entre eux. Et bien entendu j'acceptais des matrices « avec des petits points », pour peu qu'elles soient clairement écrites.

Puisque Φ et Ψ sont des automorphismes réciproques, on a par ailleurs (c'est l'objectif de cette question !) :

$$\boxed{B = A^{-1}}$$

3. Attention à tourner la tête correctement :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}$$

Puisque $B = A^{-1}$, on a également A^{T} inversible, d'inverse $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}$; ainsi :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = B^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad \text{et en particulier } \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \beta_k}$$

4. Évidemment, l'hypothèse $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = B^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ implique $\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$...

$$\boxed{\text{Ce qui prouve la réciproque !}}$$