*À rendre le mardi 17 octobre 2023 dernier délai.*

Vous pouvez au choix rédiger deux exercices seul, ou les trois en binôme. Essayez de jouer le jeu : cherchez à deux et discutez/validez la solution de l'autre.

# 1 Un résultat classique... amélioré

On s'intéresse ici aux endomorphismes de $E$ ($\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie) vérifiant certaines propriétés simples.

1. Tout d'abord, on cherche les $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant « pour tout $x \in E$ : $(x, u(x))$ est liée », propriété notée $\mathcal{P}_1$.
   (a) Constater [1] que les homothéties $x \mapsto \lambda x$ vérifient bien la propriété $\mathcal{P}_1$ !
   *Réciproquement, on fixe dans la suite $u$ vérifiant $\mathcal{P}_1$. On souhaite montrer que c'est une homothétie.* On fixe $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base de $E$.
   (b) Quelle est la forme de la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{E}$ ?
   (c) En considérant $u(e_1 + e_2)$, affiner le résultat précédent et conclure.
2. On fixe maintenant $y_0 \in E$ **non nul**, et on cherche les $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant « pour tout $x \in E$ : $(x, u(x), y_0)$ est liée », propriété notée $\mathcal{P}_2$.
   (a) Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que l'application $x \mapsto \lambda x + \varphi(x) y_0$ vérifie $\mathcal{P}_2$.
   *Réciproquement, soit $u$ vérifiant $\mathcal{P}_2$. On souhaite montrer que $u$ est bien de ce type.*
   (b) On choisit $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_n)$ une base dont le premier vecteur est $f_1 = y_0$. Quelle est la forme de la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{F}$ ?
   (c) En considérant $u(f_2 + f_3)$, affiner le résultat précédent (sur la diagonale).
   (d) En considérant $u(f_1 + f_2)$, affiner le résultat précédent (sur la première colonne).
   (e) En fixant $\lambda$ « comme on pense », considérer $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ et conclure.
3. [Facultatif] Les résultats précédents sont-ils maintenus si $E$ est de dimension infinie ? Justifier !

# 2 Un exercice d'oral

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) + P(X) = 0$. Montrer que $P = 0$.
2. Recommencer, mais de façon moins fumeuse.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X+1) + P_n(X) = X^n$.
4. Pour $n \geqslant 1$, trouver une relation entre $P_n'$ et $P_{n-1}$. En déduire un moyen pour calculer itérativement les $P_n$.
5. Calculer $P_n$ pour $n \leqslant 3$.

# 3 Algèbre linéaire : commutant d'une matrice

Dans tout cet exercice, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\mathcal{C}(A)$ désigne l'ensemble des matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$, et enfin $\mathbb{R}[A]$ désigne l'ensemble des matrices de la forme $P(A)$, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, avec la définition usuelle de $P(A)$ : si $P = p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n$, on a $P(A) = p_0 I_3 + p_1 A + \cdots + p_n A^n$.

1. Il s'agit d'écrire une phrase qui me montre que vous avez compris la question...

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ et $\mathbb{R}[A]$ sont deux sous-espaces de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Etablir l'inclusion de l'un dans l'autre (oui, à vous de plisser les yeux avant de décider laquelle !).
2. Montrer que $A^2 = \lambda A + \mu I_3$, avec $\lambda$ et $\mu$ à préciser.
3. En utilisant le résultat précédent, montrer que $\mathbb{R}[A]$ est de dimension 2.
4. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Résoudre $AB - BA = 0$ (les inconnues étant $a, b, ..., h, i$) puis déterminer une base de $\mathcal{C}(A)$ ainsi que sa dimension.
   *Dans la suite, on se propose de retrouver ce résultat de façon un peu plus géométrique...*
5. Notons $u$ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$. Déterminer une base de $E_1 = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ et une base de $E_2 = \mathrm{Ker}\,(u - 3\mathrm{Id}_E)$.
6. Montrer que $E_1$ et $E_2$ sont supplémentaires.
7. Montrer que $v \in \mathcal{L}(E)$ commute avec $u$ si et seulement si $v(E_1) \subset E_1$ et $v(E_2) \subset E_2$.
8. On note $\mathcal{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ qui commutent avec $u$. Montrer que l'application
$$\Phi \left\| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(u) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_1) \times \mathcal{L}(E_2) \\ v & \longmapsto & (v|_{E_1}, v|_{E_2}) \end{array} \right.$$
   est un isomorphisme.
9. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(u)$, puis celle de $\mathcal{C}(A)$.
   *On pourra admettre le résultat suivant : si $F$ et $G$ sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $F \times G$ aussi, avec $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$.*
   *Vous pouvez aussi prendre le temps de l'établir...*